Opgave 90

Klemmelemma:
Lad $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ og $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ være reelle talfølger således, at x_n er "klemt inde"mellem a_n og b_n dvs.

$$a_n \leq x_n \leq b_n, \quad \forall\ n \in \mathbb{N} \tag{1}$$

Bevis, at hvis talfølgerne $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ og $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ er konvergente med den samme grænseværdi c, så er $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ også konvergent med grænseværdien c.

Bevis.
Det vides at:

$$a_n \to c, \quad \text{for} \quad n \to \infty$$

$$b_n \to c, \quad \text{for} \quad n \to \infty$$

Vi vil vise at:

$$x_n \to c, \quad \text{for} \quad n \to \infty$$

Vi skal bevise at

$$\forall \epsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow |x_n - c| < \epsilon \tag{2}$$

Da vi ved $\epsilon > 0$ medfører det at:

$$\frac{\epsilon}{3} > 0$$

Det giver:

$$\forall \epsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow |b_n - c|\ \land\ |a_n - c| < \frac{\epsilon}{3} \tag{3}$$

Udtrykket $x_n - c$ kan, ved at addere nul, omskrives til følgende:

$$x_n - c = x_n - a_n + a_n - c$$

Vha. trekantsuligheden fås:

$$|x_n - c| \leq |x_n - a_n| + |a_n - c| \tag{4}$$

Nu betragtes udtrykket $|x_n - a_n|$. Da $|x_n - a_n| = x_n - a_n$ og $|b_n - a_n| = b_n - a_n$ jævnfør 1. Det ses også vha. (1), at $x_n - a_n \leq b_n - a_n$. Altså er:

$$|x_n - a_n| \leq |b_n - a_n|$$

I næste trin adderes 0

$$|b_n - a_n| = |b_n - c + c - a_n|$$

Vha. trekantsuligheden fås:

$$|b_n - c + c - a_n| \leq |b_n - c| + |c - a_n|$$

Dermed fås:

$$|x_n - a_n| \leq |b_n - c| + |c - a_n| \tag{5}$$

Vi har nu 4 og 5, som sammensat giver:

$$|x_n - c| \leq |b_n - c| + |c - a_n| + |a_n - c|$$

Vi har fra (3) at $|b_n - c| + |c - a_n| + |a_n - c| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon$ $\square$