Analyse 1, opg 92, version 2

erasmu16

September 2016

1 Selve opgaven

Lige så vel som det i definitionen af konvergens af en talfølge er nok at se på små ε (se Eksempel 4,9), er det nok at se på "store" N, hvormed vi vil forstå $N \geq N_0$, hvor $N_0 \in \mathbb{N}$ er et eller andet givet tal.
Lad os være konkrete og sætte $N_0 = 10^6$.
Bevis, at $a_n \to a$ for $n \to \infty$, hvis og kun hvis

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N \geq 10^6 \, \forall n \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow | a - a_n | < \varepsilon \tag{1}$$

2 Løsning

Beviset er et direkte bevis, hvori der indgår en biimplikation mellem ligning (1) og Definitionen på konvergens af talfølge, skrevet op nedenfor i ligning (2)

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow | a - a_n | < \varepsilon \tag{2}$$

2.1 Del 1

Hvis vi antager, at (2) er opfyldt skal vi bevise, at (1) også er opfyldt. Lad $\varepsilon > 0$ være givet. Lad N afparere ε i (2). Sæt $N' = \max(N, N_0)$, hvor naturligvis $N_0 = 10^6 \in \mathbb{N}$. Indsæt N' på N's plads i (1)

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N \geq 10^6 \, \forall n \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow | a - a_n | < \varepsilon$$

2.2 Del 2

Hvis vi antager, at (1) er opfyldt skal vi bevise, at (2) også er opfyldt.
Lad $\varepsilon > 0$ være givet. Når N afparerer ε i (1) så afparerer N også ε i (2)

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow | a - a_n | < \varepsilon$$

og (2) er opfyldt.