Opgave 3

Betragt følgende forbedrede udgave af rodkriteriet, som benytter lim sup i stedet for lim (se Opgave 112 og 126 i *Funktioner af en og flere variable* for definition og egenskaber af lim sup).

Sætning 9 (Rodkriteret II). Lad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ være en kompleks række og lad $\alpha = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ Så gælder følgende.

1. Hvis $\alpha < 1$, så konvergerer rækken $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut.

2. Hvis $\alpha > 1$, så divergerer rækken $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

3. Hvis $\alpha = 1$ og $\sqrt[n]{|a_n|} > 1$ for uendeligt mange n, så divergerer rækken $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

4. Hvis $\alpha = 1$ og $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$ fra et vist trin $n \leq N$, så kan rækken $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ enten divergere, konvergere absolut eller blot konvergere betinget.

(a) Bevis 1 i Sætning 9.

(b) Bevis 2 i Sætning 9.

(c) Bevis 3 i Sætning 9.

(d) Find en absolut konvergent række $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ med $\alpha = 1$ og $\sqrt[n]{|a_n|} \leq 1$ fra et vist trin.

(e) Find en række $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ med $\alpha = 1$ og $\sqrt[n]{|a_n|} \leq 1$ fra et vist trin, som divergerer.

(f) Find en divergent række $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ med $\alpha = 1$ og $\sqrt[n]{|a_n|} \leq 1$ fra et vist trin, som konvergerer betinget, men som ikke konvergerer absolut.

(a) ***Bevis*** Antag $\alpha < 1 \in \mathbb{R}$
Lad følgen $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ være defineret og lad

$$b_n = \sup\{\sqrt[k]{|a_k|}\ |k \geq n\}$$

Da gælder $\alpha = \lim_{n\to\infty} b_n = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, altså er følgen $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergent.

Lad $\varepsilon > 0$ være givet, sådan at $\alpha + \varepsilon < 1$.

Det følger nu af Lemma 4.11, at for følgen $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ eksisterer der et reelt tal $k = \alpha + \varepsilon$ således at $b_n \leq k$ fra et vist trin. Men da b_n er mindre end k fra et vist trin følger det altså at

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq b_n < \alpha + \varepsilon \Rightarrow |a_n| < (\alpha + \varepsilon)^n$$

Da rækken $\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha + \varepsilon)^n$ er en geometrisk række gælder der ifølge sætning 4.32, at da $|\alpha + \varepsilon| < 1$, er rækken konvergent og da følger det, at rækken $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ er konvergent ved sammenligningskriteriet og derved konvergerer rækken $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut. ■

(b) ***Bevis*** Antag $\alpha > 1 \in \mathbb{R}$
Da er $b_n = \sup\{\sqrt[k]{|a_k|}\ |k \geq n\} > 1$ fra et vist trin, og dermed findes for alle $n \in \mathbb{N}$ et $k \geq n$ så $\sqrt[k]{|a_k|} > 1$ og derfor $|a_k| > 1$. Altså går $|a_n|$ ikke mod 0 når $n \to \infty$, og divergerer altså. ■

(c) ***Bevis*** Antag $\alpha = 1$ og $\sqrt[n]{|a_n|} > 1$ så gælder det at

$$\sqrt[n]{|a_n|} > 1 \iff |a_n| > 1^n = 1$$

og dermed må $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ divergere. ■

(d) *Find en absolut konvergent række* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *med* $\alpha = 1$ *og* $\sqrt[n]{|a_n|} \leq 1$ *fra et vist trin.*

Sæt $a_n = \frac{1}{n^2}$, da er rækken $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent. Da alle led i rækken er positive, så er rækken også absolut konvergent. Da

$$\sqrt[n]{\left|\frac{1}{n^2}\right|} = \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{n^{\frac{2}{n}}} \leq 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

og

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = 1$$

af opgave 126 har vi, at

$$\alpha = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = 1.$$

Dermed opfylder rækken alle betingelserne.

(e) *Find en række* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *med* $\alpha = 1$ *og* $\sqrt[n]{|a_n|} \leq 1$ *fra et vist trin, som divergerer.*
Det følger af sætning 4.40, at følgende talrække er divergent:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

Det fremgår, at:

$$\alpha = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \limsup_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{n}}} = 1$$

Samtidig ses det, at $\sqrt[n]{\left|\frac{1}{n}\right|} \leq 1$, og alle betingelser er derfor opfyldt.

(f) *Find en divergent række* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *med* $\alpha = 1$ *og* $\sqrt[n]{|a_n|} \leq 1$ *fra et vist trin, som konvergerer betinget, men som ikke konvergerer absolut.*
Betragt rækken:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \tag{1}$$

Rækken (1) er en alternerende række, hvor følgen af numeriske værdier $\{|a_n|\}_{n=1}^{\infty}$ er aftagende og går mod 0, og dermed gælder der, at rækken konvergerer (jf. opgave 142). Men rækken konvergerer ikke absolut, da absolutværdien af rækken er:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n+1} \right| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \infty$$

Altså konvergerer rækken betinget. Der gælder endvidere, at:

$$\alpha = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left| \frac{(-1)^n}{n+1} \right|} = \limsup_{n\to\infty} (n+1)^{-\frac{1}{n}} = 1$$

Samtidig gælder der, at $\sqrt[n]{|a_n|} \leq 1$ fra et vist trin. Dermed opfylder rækken betingelserne.