Kapitel 1

Opgave 5

OPGAVEBESKRIVELSE:

I denne opgave skal følgende nyttige lemma vises:

Lemma 10: *Lad* $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ *være en reel følge, som opfylder, at* $b_n > 0$ *fra et vist trin. Så er*

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} \leq \liminf_{n\to\infty} b_n^{1/n} \leq \limsup_{n\to\infty} b_n^{1/n} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

Se Opgave 112 og 126 i *Funktioner af en og flere variable* for definition og egenskaber af lim inf og lim sup.

(a) Gør rede for, hvorfor det er nødvendigt at antage, at $b_n \neq 0$ fra et vist trin.

(b) Lad $a, b \in \mathbb{R}$. Vis, at hvis $\forall r \in \mathbb{R} : r < a \Rightarrow r < b$ så er $a \leq b$.

(c) Brug (b) til at vise Lemma 10.

Vink: Husk, at $(b_N r^n)^{\frac{1}{n+N}} = r\left(\frac{b_N}{r^N}\right)^{\frac{1}{n+N}} \to r$ *for* $n \to \infty$.

Bevis
a)
Da det ikke er tilladt at dividere med 0, skal $b_n \neq 0$.

b)
Det vises kontrapositivt:

$$\neg(a \leq b) \Rightarrow \neg(\forall r \in \mathbb{R} : r < a \Rightarrow r < b)$$

$$a > b \Rightarrow \exists r \in \mathbb{R} : r < a \wedge r \geq b$$

Da $[b, a)$ er et interval, eksisterer et $r \in [b, a)$. Dermed er (b) bevist ved kontraponering.

$\blacksquare$

c)
Bevis
Vi sætter $a = \liminf_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n}$ hvor $b_n > 0$ så derfor er $a \geq 0$. Da $b_n > 0$ er $b = \liminf_{n\to\infty} b_n^{1/n} \geq 0$.

Lad $r \in \mathbb{R}$ være givet og antag, at $r < a$. Vi skal vise, at $r < b$. Hvis $r < 0$ er der intet at vise. Antag derfor uden tab af generalitet, at $r \geq 0$. Derefter defineres

$$c_n := \inf \left\{ \frac{b_{m+1}}{b_m} : m \geq n \right\}$$

og da c_n er monoton voksende, så gælder:

$$a = \liminf_{n\to\infty} \frac{b_{m+1}}{b_m} = \lim_{n\to\infty} c_n = \sup c_n$$

Da $r < a$ og c_n er defineret, som den er, vil det gælde at:

$$\exists N \in \mathbb{N} : c_N > r \Rightarrow \forall n \geq N : c_n \geq c_N > r$$

Fordi c_n beskriver infimum for $\frac{b_{m+1}}{b_m}$ fra et vist trin ($\forall n \in \mathbb{N} : m \geq n$) vil

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} \geq c_n \ , \ \ \forall n \in \mathbb{N}$$

og da $c_n > r, \ \forall \ n \geq N$ så vil:

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} \geq c_n > r \Rightarrow \forall n \geq N : \frac{b_{n+1}}{b_n} > r$$

Da det gælder $\forall \ n \geq N$ kan man betragte talfølgen

$$N, N+1, N+2, \ldots, n-1$$

hvor følgen har $n - N$ led (betragt følgen $0, 1, 2, \ldots, n-1$ som har $n - 0$ led) så vil:

$$\frac{b_{N+1}}{b_N} > r, \frac{b_{N+2}}{b_{N+1}} > r, \ldots, \frac{b_n}{b_{n-1}} > r$$

Ved at tage produktet af alle højresider og produktet af alle venstresider og sætte uligheden imellem dem fås

$$\frac{b_{N+1}}{b_N} \cdot \frac{b_{N+2}}{b_{N+1}} \cdot \ldots \cdot \frac{b_n}{b_{n-1}} > r^{n-N}$$

Dette kan skrives som:

$$\frac{b_n}{b_N} > r^{n-N} \Rightarrow b_n > r^n \frac{b_N}{r^N}$$

Ved at tage $f : x \mapsto x^{1/n}$ (som er en voksende funktion) på begge sider fås:

$$b_n^{1/n} > \left(r^n \frac{b_N}{r^N}\right)^{1/n} \Rightarrow b_n^{1/n} > r\left(\frac{b_N}{r^N}\right)^{1/n}$$

Ved at tage limes infimum på begge sider fås

$$\liminf_{n\to\infty} b_n^{1/n} \geq \liminf_{n\to\infty}\left(r\left(\frac{b_N}{r^N}\right)^{1/n}\right) = r$$

da $\frac{1}{n} \to 0$ når $n \to \infty$, så er $r \cdot \left(\frac{b_N}{r^N}\right)^0 = r \cdot 1$.

Det er dermed vist, at

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} > r \Rightarrow \liminf_{n\to\infty} b_n^{1/n} \geq r$$

og på baggrund af opgave (b) medfører det:

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} \leq \liminf_{n\to\infty} b_n^{1/n}$$

Den sidste ulighed med limes supremum kan bevises på lignende vis, og ud fra opgave 112 (d) ved vi, at

$$\liminf_{n\to\infty} b_n^{1/n} \leq \limsup_{n\to\infty} b_n^{1/n}$$

Dermed er det bevist, at:

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} \leq \liminf_{n\to\infty} b_n^{1/n} \leq \limsup_{n\to\infty} b_n^{1/n} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

$\blacksquare$