0.1 Opgave 6

Sætning 0.1 (Kvotientkriteriet II)**.** *Lad* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *være en række, som opfylder at* $a_n \neq 0$*, fra et vist trin* $n \geq N$*. Så gælder følgende:*

1 *Hvis* $R = \limsup_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$*, så konvergerer rækken* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *absolut.*

2 *Hvis* $r = \liminf_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1$*, så divergerer rækken* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$*.*

3 *Hvis* $r = \liminf_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 1$*, men* $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \geq 1$*, for alle* n *fra et vist trin* $n \geq N'$*, så divergerer rækken* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$*.*

(a) Bevis 1 og 2 i Sætning 11 vha. Lemma 10 og Sætning 9.
(b) Bevis 3 i Sætning 11

Bevis. **1** Vi får givet, at:

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$$

Jf. lemma 10 har vi dermed:

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$$

Bemærk, at hvis lemma 10 holder uden numeriske tegn, holder den så sandeligt også med numeriske tegn. Hvilket medfører, at

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$$

Jf. sætning 9, er rækken derfor absolut konvergent.

■

Bevis. **2**:

Vi ved, at

$$r = \liminf_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1$$

Af lemma 10 følger:

$$1 < \liminf_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq \liminf_{n\to\infty} |a_n^{1/n}| \leq \limsup_{n\to\infty} |a_n^{1/n}|.$$

Med andre ord, er $\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} > 1$ og fra sætning 9 (2) vides det derfor, at rækken er divergent.

■

Bevis af 3:

I pkt. 3 ved vi, at:

$$r = \liminf_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 1$$

Vi ved altså, at når $n \to \infty$ vil den største nedre grænse af udtrykket $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ have grænseværdien 1 fra et vist trin. Derudover ved vi fra sætning 4.34, at en række kun er konvergent, hvis den følge, der summeres i rækken, går imod nul.

Da $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \geq 1$, for alle n fra et vist trin $n \geq N'$, gælder fra et vist trin, at:

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \geq 1 \Rightarrow |a_{n+1}| \geq |a_n|$$

.

Hvilket viser, at $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ er en absolut voksende følge. Dermed går følgen, der summeres, ikke mod 0, og rækken er dermed divergent.

■