## 0.1 Opgave 7 gruppe G 4.113

*I denne opgave relateres Sætning 9 og Sætning 11 til konvergensradius for en potensrække* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$
**a)** *Bevis Sætning 12 vha. Sætning 9.*

**Sætning 12** (Konvergensradius II). *Lad* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ *være en reel eller kompleks potensrække og sæt* $\alpha = \text{limsup}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. *Hvis* $\alpha = \infty$, *så er rækkens konvergensradius* $R = 0$, *ellers er rækkens konvergensradius* $R$ *givet ved* $\frac{1}{R} = \alpha$, *hvor* $0 < R \leq \infty$.

Bevis:
For at kunne anvende Sætning 9 på potensrækken $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ definerer vi $b_n = a_n(z-a)^n$. Fra 1. i Sætning 9 gælder, at når $\beta < 1$ så konvergerer potensrækken $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ absolut. Dermed betyder det, at

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|b_n|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}|z-a| < 1, \tag{1}$$

hvor det er defineret, at $\alpha = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Dette kan omskrives til

$$|z-a| < \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\alpha} = R. \tag{2}$$

Dermed er det vist, at kovergensradius R er givet ved $\frac{1}{R} = \alpha$ når $\alpha$ ikke er $\infty$.
Når $\alpha = \infty$ gælder det at

$$\alpha = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty, \tag{3}$$

og dermed at

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n(z-a)^n|} = \infty, \quad \text{for} \quad z \neq a. \tag{4}$$

Fra 2. i sætning 9 gælder, at potensrækken divergerer for $\alpha > 1$, og da Eq. (3) gælder, betyder det Eq. (4) kun gælder for $z \neq a$. Det vil sige, at potensrækken divergerer når $z \neq a$ og dermed er konvergensradius $R = 0$.
**b)** *Find en øvre grænse for konvergensradius for en potensrække* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ *ved hjælp af* $\liminf_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$.

Fra Lemma 10 ligning 7 ved vi følgende

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}, \tag{5}$$

hvor højresiden svarer til $\alpha$ fra a). Vi ved endvidere fra a) at

$$R = \frac{1}{\alpha} \leq \frac{1}{\liminf_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}} = \bar{R}. \tag{6}$$

Dette er den inverse til den nedre grænse, og dermed den øvre grænse for konvergensradius, udtrykt ved $\bar{R}$

**c)** *Find en nedre grænse for konvergensradius for en potensrække* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ *ved hjælp af* $\limsup_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$.

Vi ved fra Lemma 10 ligning 7 at

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}, \tag{7}$$

hvor venstresiden svarer til $\alpha$ fra a). Dermed gælder det at

$$R = \frac{1}{\alpha} \geq \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}} = \underline{R}, \tag{8}$$

hvor $\underline{R}$ er den nedre grænse for konvergensradius.

**d)** *Er man normalt mest interesseret i en øvre eller en nedre grænse for konvergensradius - m.a.o. hvilken af de t o ovenstående resultater er oftest mest brugbar?.*

Man ved, at alt indenfor den nedre grænse konvergerer, hvilket ikke kan siges om den øvre grænse. Det kommer dog også an på det specifikke formål med at finde disse grænser.

**e)** *Konstruér et eksempel på en potensrække, hvor den nedre grænse for konvergensradius fra c) er forskellig fra den rigtige konvergensradius.*

Vi vælger en potensrække givet ved

$$a_n = \begin{cases} \pi \text{ hvis } n \text{ er lige} \\ e \text{ hvis } n \text{ er ulige} \end{cases} \tag{9}$$

For den nedre grænse gælder det derfor, at rækken bliver

$$\left\{ \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \right\}_{n=1}^{\infty} = \{\frac{\pi}{e}, \frac{e}{\pi}, \frac{\pi}{e}, \frac{e}{\pi}, ...\}, \tag{10}$$

hvilket fortsætter uendeligt. Dermed går den øvre grænse mod

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{\pi}{e}, \tag{11}$$

og dermed bliver den nedre konvergensradius

$$\underline{R} = \frac{1}{\frac{\pi}{e}} = \frac{e}{\pi}. \tag{12}$$

Fra Eq. (7) og Eq. (8) gælder det at

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \pi^{1/n} \to \pi^0 = 1, \quad \text{for } n \to \infty \tag{13}$$

og dermed at

$$R = 1 > \underline{R}. \tag{14}$$

Derved er $R > \underline{R}$.