De reelle tal

Morten Grud Rasmussen
15. september 2016

Ordnede mængder

Definition 3.1 (Ordnet mængde)**.** $(M, <)$ kaldes en *ordnet mængde* såfremt:

- For alle $x, y \in M$ gælder netop ét af følgende:

$$x < y, \qquad x = y, \qquad y < x$$

- $\forall x, y, z \in M\colon x < y \text{ og } y < z \quad \Rightarrow \quad x < z$

Symbolerne $>$, $\leqslant$ og $\geqslant$ bruges som vanligt.

Definition 3.2 (Største/mindste element)**.** Lad $A \subset M$, hvor $(M, <)$ er en ordnet mængde. Hvis $s \in M$ opfylder at $s \in A$ og $a \in A \Rightarrow a \leqslant s$, så kaldes s A's *største element*. *Mindste element* defineres tilsvarende.

Sætning 3.3 (Entydighed af største/mindste element)**.** *En delmængde $A \subset M$, hvor $(M, <)$ er en ordnet mængde, har højst ét største (mindste) element.*

Bevis. Bevis det selv. □

Definition 3.6 (Øvre/nedre grænse)**.** Lad $A \subset M$, hvor $(M, <)$ er en ordnet mængde, og lad $b \in M$. Hvis $\forall a \in A\colon a \leqslant b$, så kaldes b en *øvre grænse* for A. *Nedre grænse* defineres tilsvarende.

Se Sætning 3.7 og 3.8 for forskellige formuleringer af egenskaben og dens negation.

Definition 3.9 (Begrænsethed)**.** Lad $A \subset M$, hvor $(M, <)$ er en ordnet mængde. A siges at være *opadtil begrænset*, hvis A har en øvre grænse, tilsvarende med *nedadtil begrænset*. A siges at være *begrænset*, hvis A er opadtil og nedadtil begrænset.

Eksempel. $\varnothing$ er begrænset.

Definition 3.10 (mindste øvre grænse/største nedre grænse)**.** Lad $A \subset M$, hvor $(M, <)$ er en ordnet mængde og $b \in M$. Så kaldes b en *mindste øvre grænse* hvis

- b er en øvre grænse for A og
- hvis c er en øvre grænse for A, så er $b \leqslant c$.

Største nedre grænse defineres tilsvarende.

Se Sætning 3.11 og 3.12 for forskellige formuleringer af egenskaben. Da en mindste øvre grænse for en mængde A specielt er mindste element i mængden af øvre grænser for A, giver Sætning 3.3, at der højst er én mindste øvre grænse. Entydigheden giver anledning til følgende:

Definition 3.15 (supremum, infimum)**.** Den mindste øvre grænse b (største nedre grænse c) for en mængde A kaldes for A's *supremum* (*infimum*) og vi skriver:

$$b = \sup A \qquad\qquad (c = \inf A).$$

Se Korollar 3.16 for sammenhængen mellem supremum og infimum.

De reelle tal

Definition 1.1 (Legeme)**.** $(K, +, \cdot)$ kaldes et *legeme* såfremt:

- $\forall r, s, t \in K$:

$$r + s \in K \tag{1}$$
$$r \cdot s \in K \tag{2}$$
$$r + s = s + r \tag{3}$$
$$r \cdot s = s \cdot r \tag{4}$$
$$r + (s + t) = (r + s) + t \tag{5}$$
$$r \cdot (s \cdot t) = (r \cdot s) \cdot t \tag{6}$$
$$r \cdot (s + t) = rs + rt \tag{7}$$

- $\exists 0, 1 \in K \forall r \in K$:

$$r + 0 = r \tag{8}$$
$$1 \cdot r = r \tag{9}$$

-

$$\forall r \in K \exists v \in K: \qquad r + v = 0 \qquad (v = -r) \tag{10}$$
$$\forall r \in K \backslash \{0\} \exists w \in K: \qquad r \cdot w = 1 \qquad (w = r^{-1}) \tag{11}$$

Definition (Ordnet legeme)**.** $(K, +, \cdot, <)$ kaldes et *ordnet legeme* såfremt

- $(K, +, \cdot)$ er et legeme
- $(K, <)$ er en ordnet mængde
- $\forall r, s, t \in K$:

$$r < s \quad \Rightarrow \quad r + t < s + t \tag{12}$$
$$t > 0 \text{ og } r < s \quad \Rightarrow \quad tr < ts \tag{13}$$

Definition 3.4 (De reelle tal)**.** Et ordnet legeme $(K, +, \cdot, <)$, som opfylder, at enhver ikke-tom, opadtil begrænset delmængde $A \subset K$ har en mindste øvre grænse (også kaldet *supremumsegenskaben*), kaldes et eksemplar af *de reelle tal* og vi skriver $\mathbb{R}$ i stedet for K.

Formuleringen “et eksemplar af” dækker over, at de reelle tal kan konstrueres på flere forskellige måder, men man kan vise, at resultaterne i alle tilfælde er identiske i en passende matematisk forstand. Vi vil (i hvert fald i første omgang) ikke konstruere de reelle tal, men blot antage, at vi har et eksemplar af de reelle tal til rådighed og se, hvad vi herudfra kan konkludere. Et nemt eksempel er følgende sætning.

Sætning 3.14 (Infimum-egenskaben)**.** *Enhver ikke-tom, nedadtil begrænset delmængde af $\mathbb{R}$ har en største nedre grænse.*

For at vise dette, skal vi bruge følgende resultat[1], som er godt at have i andre sammenhænge.

Proposition 3.20. *Lad $(K, +, \cdot, <)$ være et ordnet legeme, $r, s \in K$. Så er*

$$r < s \qquad \Leftrightarrow \qquad s - r > 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad -r > -s.$$

Specielt er $r < 0$ hvis og kun hvis $-r > 0$.

Bevis. Vha. gentagen brug af (12) med t hhv. lig med $-r$, $-s$ og $s + t$ fås

$$\begin{array}{ccccc} r < s & \Rightarrow & 0 = r - r < s - r & \Rightarrow \\ -s = 0 - s < s - r - s = -r & \Rightarrow & r = -s + r + s < -r + r + s = s. \end{array}$$

Sidste udsagn fås blot ved at sætte $s = 0$. □

Bevis for Sætning 3.14. Lad $A \subset \mathbb{R}$ være en ikke-tom, nedadtil begrænset delmængde. Definér mængden $-A = \{-a \mid a \in A\}$. Da A er ikke-tom, er $-A$ det også. Lad c være en nedre grænse for A, dvs.

$$\forall a \in A \colon c \leqslant a,$$

som jf. Proposition 3.20 er det samme som

$$\forall a \in A \colon -c \geqslant -a$$

eller

$$\forall b \in -A \colon -c \geqslant b,$$

som er det samme som at $-c$ er en øvre grænse for $-A$. Vi ser altså, at $-c$ er en øvre grænse for $-A$ hvis og kun hvis c er en nedre grænse for A. Da A er nedadtil begrænset, er $-A$ altså opadtil begrænset, og jf. supremumsegenskaben (se Definition 3.4) har $-A$ en mindste øvre grænse $\sup(-A)$. Sættes $-c = \sup(-A)$ må c altså være en nedre grænse for A, som jf. Proposition 3.20 må være den største nedre grænse. □

[1] En proposition er en “lille sætning”. Dette ord bruges ikke i bogen, hvor alle resultater, store som små, enten kaldes for sætning, lemma eller korollar.

Arkimedes' princip

Sætning 3.17 (Arkimedes' princip)**.** *For ethvert $r \in \mathbb{R}$ eksisterer et $n \in \mathbb{N}$ så $n > r$.*

Bevis. Vi vil benytte os af et modstridsbevis (også kaldet et indirekte bevis). Da $1 \in \mathbb{R}$ og $s, t \in \mathbb{R} \Rightarrow s + t \in \mathbb{R}$, er det klart, at $\mathbb{R}$ indeholder (en kopi af) de naturlige tal $\mathbb{N}$. For at nå til en modstrid, begynder vi med at negere udsagnet i sætningen. Antag altså at:

$$\neg \forall r \in \mathbb{R} \exists n \in \mathbb{N} \colon n > r \quad \Leftrightarrow \quad \exists r \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} \colon n \leqslant r,$$

eller sagt med ord: $\mathbb{N}$ er opadtil begrænset (af det r, hvis eksistens påstås), og $a = \sup \mathbb{N}$ eksisterer dermed:

$$\forall n \in \mathbb{N} \colon n \leqslant a.$$

Da $n \in \mathbb{N} \Rightarrow n + 1 \in \mathbb{N}$ har vi også at

$$\forall n \in \mathbb{N} \colon n + 1 \leqslant a$$

eller (ved brug af (12))

$$\forall n \in \mathbb{N} \colon n \leqslant a - 1,$$

som altså er udsagnet, at $a - 1$ er en øvre grænse for $\mathbb{N}$, i modstrid med, at $a > a - 1$ er den *mindste* øvre grænse. □

Korollar 3.18. *For ethvert positivt, reelt tal $r > 0$ eksisterer et $n \in \mathbb{N}$, så $\frac{1}{n} < r$.*

Bevis. Da $r > 0$, er $\frac{1}{r} \in \mathbb{R}$. Vælg $n \in \mathbb{N}$ så $\frac{1}{r} < n$ vha. Arkimedes' princip. Da

$$\frac{1}{r} < n \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{n} < r,$$

er vi færdige. □

Korollar 3.19. *Ethvert åbent interval $I =]a, b[$ indeholder uendeligt mange rationelle tal.*

I opgave 76 skal I selv vise, at I også indeholder uendeligt mange *irrationelle tal.* Det viser sig faktisk, at der i en matematisk præcis forstand er langt flere irrationelle tal end rationelle tal, eksempelvis i intervallet I, men dette resultat ligger undenfor kursets mål[2].

Bevis. Beviset består af tre dele.

(i) Vi viser først, at hvis $a > 0$, så indeholder $]a, b[$ mindst ét rationelt tal. Antag derfor, at $a > 0$. Da $b - a > 0$, giver Korollar 3.18 eksistensen af $n \in \mathbb{N}$ så $\frac{1}{n} < b - a$. Arkimedes' princip giver eksistensen af et $m \in \mathbb{N}$ så $na < m \Leftrightarrow a < \frac{m}{n}$. Til forrige session skulle I selv vise Sætning 1.11, som siger, at enhver ikke-tom delmængde af $\mathbb{N}$ indeholder et mindste element (opgave 18). Sæt nu $\bar{m} = \min\{m \in \mathbb{N} \mid a < \frac{m}{n}\}$, dvs.

$$\frac{\bar{m}}{n} > a \quad \text{og} \quad \frac{\bar{m} - 1}{n} \leqslant a.$$

Nu er

$$a < \frac{\bar{m}}{n} = \frac{\bar{m} - 1}{n} + \frac{1}{n} \leqslant a + \frac{1}{n} < a + (b - a) = b$$

og vi har altså, at $c = \frac{\bar{m}}{n} \in]a, b[\cap \mathbb{Q}$.

[2]Her er et lille ordspil for de indviede...

(ii) Vi viser nu, at ethvert interval indeholder mindst ét rationelt tal. Hvis $a \leqslant 0$, så eksisterer jf. Arkimedes' princip et $n > -a$, så $a' = a + n > 0$. Sætter vi $b' = b + n$, ved vi fra (i) at $]a', b'[$ indeholder mindst ét rationelt tal $c' \in]a', b'[\cap \mathbb{Q}$. Men så er $c = c' - n \in]a, b[\cap \mathbb{Q}$.

(iii) Vi afslutter nu argumentet på følgende måde: Lad $c_1 = c \in]a, b[\cap \mathbb{Q}$. Vi kan nu vha. (ii) vælge $c_2 \in]a, c_1[\cap \mathbb{Q} \subset]a, b[\cap \mathbb{Q}$ og iterativt $c_{i+1} \in]a, c_i[\cap \mathbb{Q} \subset]a, b[\cap \mathbb{Q}$. Dvs. for ethvert $i \in \mathbb{N}$ har vi et $c_i \in]a, b[\cap \mathbb{Q}$, og $]a, b[$ indeholder altså uendeligt mange rationelle tal. □

Eksistens af $\sqrt{2}$

Til forrige session skulle I selv overbevise jer om, at $\sqrt{2}$ ikke er et rationelt tal. Vi vil nu vise, at der imidlertid i $\mathbb{R}$ eksisterer et tal, som fortjener navnet $\sqrt{2}$.

Sætning 3.26. *Der eksisterer et positivt, reelt tal x, så $x^2 = 2$.*

Bevis. Beviset går ud på at vise, at $x = \sup A$, hvor $A = \{a \in \mathbb{R} \mid a^2 \leqslant 2\}$, eksisterer og opfylder $x > 0$ og $x^2 = 2$. Først etableres eksistensen af x:

(i) *A er ikke-tom og opadtil begrænset:* Da $1^2 = 1 \leqslant 2$ har vi $1 \in A$ og at 2 er en øvre grænse følger af opgave 67, som I skal løse senere i dag.

(ii) *Vi har at $1 \leqslant x \leqslant 2$:* Da $1 \in A$ og $x = \sup A$ gælder første ulighed, og da 2 er en øvre grænse for A følger anden ulighed.

(iii) *Vi har ikke, at $x^2 < 2$:* Antag, at $x^2 < 2$. Så er $\varepsilon = 2 - x^2 > 0$, og (ii) giver, at $\varepsilon \leqslant 1$. Vælg nu et $\delta \in \mathbb{R}$ så $0 < \delta < \frac{\varepsilon}{5} \leqslant \frac{1}{5}$. Sæt $r = x + \delta$. Så er

$$r^2 = (x + \delta)^2 = x^2 + 2x\delta + \delta^2 = x^2 + (2x + \delta)\delta.$$

Men da $x \leqslant 2$ og $\delta \leqslant \frac{1}{5} \leqslant 1$ er $2x + \delta \leqslant 5$ og

$$r^2 \leqslant x^2 + 5\delta < x^2 + \varepsilon = 2,$$

og vi har altså $r \in A$ samtidig med at $r > x = \sup A$, en modstrid.

(iv) *Vi har ikke, at $x^2 > 2$:* Antag, at $x^2 > 2$. Så er $\varepsilon = x^2 - 2 > 0$ og (ii) giver, at $\varepsilon \leqslant 2$. Sæt nu $s = x - \frac{\varepsilon}{4} > 0$. Hvis vi for en nemheds skyld skriver $\delta = \frac{\varepsilon}{4}$, så er

$$s^2 = (x - \delta)^2 = x^2 - 2x\delta + \delta^2 > x^2 - 2x\delta \geqslant x^2 - 4\delta = x^2 - \varepsilon = 2 \tag{14}$$

At s er en øvre grænse følger nu af (14) samt opgave 67. Men dette er i modstrid med, at x er en mindste øvre grænse. □