Opgave 1 (20 POINT)

I denne opgave antager vi, at $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

(a) Omskriv ODE'en

$$\tan(x)y'(x) = y(x) \tag{1}$$

til separeret form.

(b) Find en ligning for en løsning y til (1), som ikke indeholder y', vha. separation af de variable. Du behøver ikke udregne integralerne.

(c) Lad y_1 betegne den løsning til (1), som opfylder $y(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Find $y_1'(\frac{\pi}{4})$.

(d) Løsningen y_1 er også er en løsning til

$$y''(x) + \tan(x)y'(x) + y(x) = \sin(x). \tag{2}$$

Brug (1) og (2) til at finde en anden lineær ODE af første orden for y_1. Vink: isolér y' i (1) og find et udtryk for y'' ved at differentiere på begge sider.

(e) Find også $y_1''(\frac{\pi}{4})$.

(f) Find y_1. Begrund dit svar.

Opgave 2 (20 POINT)

Lad $y_1(x) = \sin(x)$ og $y_2(x) = \sin(x)(\cos(x) + 1)$. Det kan vises, at y_1 og y_2 er løsninger til

$$y''(x) + \sin(x)\cos(x)y'(x) + (4 - \cos(2x))y(x) = \frac{15}{4}\sin(x) - \frac{1}{4}\sin(3x). \tag{3}$$

(a) Find en løsning $y_3 \neq 0$ til

$$y''(x) + \sin(x)\cos(x)y'(x) + (4 - \cos(2x))y(x) = 0. \tag{4}$$

(b) Find en løsning y_4 til (4), som er lineært uafhængig af y_3. Det er nok at finde en formel for løsningen, det er tilladt at benytte y_1, y_2 og/eller y_3 i udtrykket, også selvom du ikke har fundet disse, og eventuelle integraler behøves ikke udregnet.

(c) Find den fuldstændige løsning y_h til (4). Det er tilladt at benytte y_1, y_2, y_3 og/eller y_4 i udtrykket, også selvom du ikke har fundet disse.

(d) Find den fuldstændige løsning y_g til (3). Det er tilladt at benytte y_1, y_2, y_3, y_4 og/eller y_h i udtrykket, også selvom du ikke har fundet disse.

(e) Find en løsning y_p til (3), som opfylder, at $y_p(0) = 0$ og $y_p'(0) = 2$.

(f) Kan du finde andre løsninger $\tilde{y}_p$ til (3), som opfylder $\tilde{y}_p(0) = 0$? Begrund dit svar.

Opgave 3 (20 POINT)

I denne opgave skal du løse begyndelsesværdiproblemet

$$y''(t) + \tfrac{444}{23}y'(t) + \tfrac{51400}{529}y(t) = -10e^{-\frac{222}{23}t}\sin(3t), \tag{5}$$
$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 6. \tag{6}$$

(a) Find den generelle løsning y_h til det homogene problem

$$y''(t) + \tfrac{444}{23}y'(t) + \tfrac{51400}{529}y(t) = 0. \tag{7}$$

(b) Find en løsning y_1 til (7) som opfylder, at $y_1(0) = 0$ og $y_1'(0) = 2$.

(c) Gælder det også, at funktionen $y_2(t) = 2e^{-\frac{222}{23}t}\sin(t)\cos(t)$ er en løsning til (7) med $y_2(0) = 0$ og $y_2'(0) = 2$? Begrund dit svar.

(d) Er $y_1 = y_2$? Begrund dit svar.

(e) Brug de ubestemte koefficienters metode til at finde en partikulær løsning y_p til (5).

(f) Find løsningen til begyndelsesværdiproblemet givet ved (5) og (6).

Opgave 4 (20 POINT)

Lad $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være givet ved $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n!}$, som også kan skrives $f(x) = e^{\cos(x)}\cos(\sin(x))$.[1]

(a) Er f periodisk? Hvis ja, så find fundamentalperioden for f, altså f's korteste, positive periode.

(b) Er f lige, ulige, begge dele eller ingen af delene? Begrund dit svar.

(c) Lad $u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\cos(nx)e^{-4n^2t}$. Gør rede for, at u løser den endimensionelle varmeligning $u_t = c^2u_{xx}$ på $(x,t) \in [0,\pi] \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ for et passende $c > 0$ og bestem c.

(d) Hvilken randbetingelse opfylder $u(x,t)$?

(e) Find h, så u opfylder begyndelsesværdibetingelsen $u(x,0) = h(x)$.

(f) Find Fourierrækken for h.

[1] Du skal ikke bekymre dig om, hvorfor $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n!} = e^{\cos(x)}\cos(\sin(x))$, men kan blot bruge det.

Opgave 5 (20 POINT)

Kald højresiden i (3) fra Opgave 2 for f, altså $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ givet ved $f(x) = \frac{15}{4}\sin(x) - \frac{1}{4}\sin(3x)$.

(a) Find Fourierrækken for f. Begrund dit svar.

(b) Find et andengradspolynomium p_2, som stemmer overens med f i $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$ og $x = \pi$.

(c) Er f og/eller p_2 periodisk? Og i givet fald med hvilken (fundamental-)periode?

(d) Anvend Simpsons metode med $n = 2$ (to delintervaller) til at estimere $\int_0^\pi f(x)\,\mathrm{d}x$.

(e) Estimér fejlen i svaret fra forrige delspørgsmål.

(f) Kan man finde en løsning til $f(x) = x$ vha. fikspunktiteration? Begrund dit svar.