English version below.

ORDINÆR EKSAMEN, MATEMATISK MODELLERING OG NUMERISKE METODER

Vinter 2016/2017

Der er 16 opgaver i alt, og alle tæller med samme vægt. Der må gøres brug af alle sædvanlige hjælpemidler, dvs. bøger, noter mv. samt elektroniske hjælpemidler, altså lommeregner, computer osv. Besvarelsen skal være håndskrevet og tilstrækkeligt detaljeret til, at det fremgår, hvordan resultatet er opnået. Det er således ikke nødvendigt at inkludere trivielle mellemregninger. Husk at skrive jeres fulde navn og studienummer på hver side af besvarelsen. Nummerér siderne og skriv antallet af afleverede ark på første side af besvarelsen.

Opgave 1. Løs begyndelsesværdiproblemet $y'(x) = e^{x-y(x)}$, $y(1) = 1$ ved hjælp af separation af de variable.

Opgave 2. Løs begyndelsesværdiproblemet $y'(x) + \frac{1}{x}y(x) = x^2$, $y(1) = 1$ ved hjælp af en af metoderne fra kurset.

Opgave 3. Find alle løsninger til $x^2y''(x) - 3xy'(x) = 0$, som opfylder, at $y(0) = 1$.

Opgave 4. Find den generelle løsning til $y''(t) - 4y'(t) - 12y(t) = 66e^{-5t}$ ved hjælp af en af metoderne fra kurset.

Opgave 5. Det oplyses, at differentialligningen $y''(t) + \tan(t)y'(t) = e^{\sin(t)}\cos^2(t)$ har løsningerne y_1, y_2 og y_3 givet ved $y_1(t) = \sin(t) + 1 + e^{\sin(t)}$, $y_2(t) = 1 + e^{\sin(t)} - \sin(t)$ og $y_3(t) = e^{\sin(t)} - \sin(t) - 1$. Find den generelle løsning.

Opgave 6. Find Laplace-transformationen af $y''(t) + 4y'(t) - 12y(t) = 66e^{-5t}\cos(2t)$, $y(0) = 10$, $y'(0) = 3$ uden brug af elektroniske hjælpemidler.

Opgave 7. Det oplyses, at $\begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. Find den generelle løsning til ODE'en $y' = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} y$.

Opgave 8. Find Fourierrækken for f givet ved $f(x) = \sin^3(x)$.

Opgave 9. Det oplyses, at funktionen $f\colon (-\pi,\pi) \to \mathbb{R}$ givet ved $f(x) = \frac{x}{\pi}$ har Fourierrækken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi} \sin(nx)$, mens $g\colon (-\pi,\pi) \to \mathbb{R}$ givet ved

$$g(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2}, & -\pi < x < 0 \\ \frac{\pi}{2}, & 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

har Fourierrækken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{n} \sin(nx)$. Find Fourierrækken for $\pi f - g$.

Opgave 10. Lad funktionen $f\colon [0,3] \to \mathbb{R}$ være givet ved $f(x) = \sum_{n=1}^{9} \frac{4}{2n-1} \sin(\frac{(2n-1)\pi}{3} x)$. Find $u\colon [0,3] \times \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$, som opfylder $u_t = 16 u_{xx}$ med randbetingelsen $u(0,t) = u(3,t) = 0$ og begyndelsesværdibetingelsen $u(x,0) = f(x)$.

Opgave 11. Kan ligningen $x = \cos(x)$ løses numerisk ved hjælp af fikspunktiteration? Begrund dit svar.

Opgave 12. Find et polynomium, som går gennem punkterne $(2,0)$, $(3,0)$, $(5,0)$, $(7,960)$, $(11,0)$ og $(13,0)$.

Opgave 13. Anvend Simpsons regel med to delintervaller til at estimere værdien af integralet $\int_0^4 (-x^4 + 6x^3 - 11x^2 + 30x + 24)\,\mathrm{d}x$. Estimér desuden fejlen på estimatet på to forskellige måder.

Opgave 14. Betragt $y'(x) = -10xy(x)$ med $y(0) = 1$. Lad $h = 0{,}5$ og sæt $x_n = nh$. Brug den baglæns Euler-metode til at finde y_{n+1} som funktion af x_n og y_n, hvor $y_{n+1} \approx y(x_{n+1})$.

Opgave 15. Betragt $y'(x) = \frac{xy^3(x)}{\sqrt{1+x^2}}$ med $y(0) = -1$. Lad $h = 0{,}1$ og sæt $x_n = nh$. Antag, at $y_1 = -1{,}00503$, $y_2 = -1{,}02041$ og $y_3 = -1{,}04717$. Estimér $y(0{,}4) \approx y_4$ ved hjælp af Adams-Bashforth-metoden.

Opgave 16. Repræsenteres løsningen til en differentialligning i Finite Element-metoden som et gennemsnit i hvert element, som en vektor i et abstrakt vektorrum, eller som en funktion? Uddyb dit svar.

Dansk version ovenfor.

ORDINARY EXAM, MATEMATICAL MODELLING AND NUMERICAL METHODS

Winter 2016/2017

There are 16 problem in total, all count with equal weight. All usual aids are allowed, i.e. books, notes etc. as well as electronic aids such as calculator, computer etc. The exam answer must be handwritten and so detailed that it is clear how the answers are obtained. Thus, it is not necessary to include trivial intermediate calculations. Remember to write full name and student number on each side of the exam answer. Number the pages and write the total number of sheets on the first page of the exam answer.

Problem 1. Solve the initial value problem $y'(x) = e^{x-y(x)}$, $y(1) = 1$ using separation of variables.

Problem 2. Solve the initial value problem $y'(x) + \frac{1}{x}y(x) = x^2$, $y(1) = 1$ using one of the methods from the course.

Problem 3. Find all those solutions to $x^2y''(x) - 3xy'(x) = 0$ which satisfy $y(0) = 1$.

Problem 4. Find the general solution to $y''(t) - 4y'(t) - 12y(t) = 66e^{-5t}$ using one of the methods from the course.

Problem 5. The differential equation $y''(t) + \tan(t)y'(t) = e^{\sin(t)}\cos^2(t)$ has the solutions y_1, y_2, and y_3 given by $y_1(t) = \sin(t) + 1 + e^{\sin(t)}$, $y_2(t) = 1 + e^{\sin(t)} - \sin(t)$, and $y_3(t) = e^{\sin(t)} - \sin(t) - 1$. Find the general solution.

Problem 6. Find the Laplace transform of $y''(t) + 4y'(t) - 12y(t) = 66e^{-5t}\cos(2t)$, $y(0) = 10$, $y'(0) = 3$ without using electronic aids.

Problem 7. Note that $\begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. Find the general solution to the ODE $y' = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} y$.

Problem 8. Find the Fourier series of f given by $f(x) = \sin^3(x)$.

Problem 9. Observe that the function $f\colon(-\pi,\pi)\to\mathbb{R}$ given by $f(x)=\frac{x}{\pi}$ has the Fourier series $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}\sin(nx)$, while $g\colon(-\pi,\pi)\to\mathbb{R}$ given by

$$g(x)=\begin{cases}-\frac{\pi}{2}, & -\pi<x<0\\ \frac{\pi}{2}, & 0\le x<\pi\end{cases}$$

has the Fourier series $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n}\sin(nx)$. Find the Fourier series of $\pi f-g$.

Problem 10. Let the function $f\colon[0,3]\to\mathbb{R}$ be given by $f(x)=\sum_{n=1}^{9}\frac{4}{2n-1}\sin(\frac{(2n-1)\pi}{3}x)$. Find $u\colon[0,3]\times\mathbb{R}_{\geq 0}\to\mathbb{R}$ such that $u_t=16u_{xx}$ with boundary condition $u(0,t)=u(3,t)=0$ and initial value condition $u(x,0)=f(x)$.

Problem 11. Can the equation $x=\cos(x)$ be solved numerically using fixed-point iteration? Explain.

Problem 12. Find a polynomial that passes through the points $(2,0)$, $(3,0)$, $(5,0)$, $(7,960)$, $(11,0)$, and $(13,0)$.

Problem 13. Use Simpson's Rule with two subintervals to estimate the value of the integral $\int_0^4(-x^4+6x^3-11x^2+30x+24)\,\mathrm{d}x$. Also, estimate the error of the estimate in two different ways.

Problem 14. Consider $y'(x)=-10xy(x)$ with $y(0)=1$. Let $h=0.5$ and put $x_n=nh$. Use the reverse/backwards Euler method to find y_{n+1} as a function of x_n and y_n, where $y_{n+1}\approx y(x_{n+1})$.

Problem 15. Consider $y'(x)=\frac{xy^3(x)}{\sqrt{1+x^2}}$ with $y(0)=-1$. Let $h=0.1$ and put $x_n=nh$. Assume that $y_1=-1.00503$, $y_2=-1.02041$, and $y_3=-1.04717$. Estimate $y(0.4)\approx y_4$ using the Adams-Bashforth method.

Problem 16. Is the solution to a differential equation in the Finite Element Method represented as an average in each element, as a vector in an abstract vector space, or as a function? Explain your answer.