Matematisk modellering og numeriske metoder
Opgaver til Lektion 9

Morten Grud Rasmussen

1. november 2016

Opgave 1

Afgør, om følgende funktioner er hhv. lige, ulige eller hverken lige eller ulige.

1. $x \mapsto e^x$ Neither
2. $x \mapsto e^{-|x|}$ Even
3. $x \mapsto x^3 \cos(nx)$ Odd
4. $x \mapsto x^2 \tan(\pi x)$ Odd
5. $x \mapsto \sinh(x) - \cosh(x)$ Neither
6. $x \mapsto x^2$, $x \in (-1, 1)$ Even \frac{1}{3}+\sum_{n=1}^\infty\frac{(-1)^n 4}{n^2\pi^2}\cos(n\pi x)
7. $x \mapsto \begin{cases} -x - \pi & \text{for} \quad -\pi < x < -\frac{\pi}{2} \\ x & \text{for} \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ -x + \pi & \text{for} \quad \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$ Odd \sum_{n=1}^\infty\frac{2(1-(-1)^n)(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^2\pi}\sin(nx)
=\sum_{n=1}^\infty\frac{-4(-1)^n}{(2n-1)^2\pi}\sin((2n-1)x)

I de to sidste tilfælde ønskes Fourierrækken med periode hhv. $p = 2$ i næstsidste tilfælde og $p = 2\pi$ i sidste tilfælde.

Opgave 2

Vis vha. Fourierrækkeudvikling, at $\cos^3(x) = \frac{3}{4}\cos(x) + \frac{1}{4}\cos(3x)$ og at $\sin^3(x) = \frac{3}{4}\sin(x) - \frac{1}{4}\sin(3x)$. Hvad er Fourierrækken for $x \mapsto \cos^4(x)$? \frac{3}{8}+\frac{1}{2}\cos(2x)+\frac{1}{8}\cos(4x)

Opgave 3

I det følgende betragter vi funktioner, som kun er defineret på $[0, \pi]$. Vi vil udregne lige hhv. ulige halvsidige Fourierudviklinger med periode 2π, som svarer til Fourierrækker i hhv. $x \mapsto \cos(nx)$ og $x \mapsto \sin(nx)$. Skitsér de lige og ulige 2π-periodiske udvidelser af nedenstående funktioner, og udregn deres Fourierrækker.

\frac{\pi}{2}+\sum_{n=1}^\infty\frac{2(1-(-1)^n)}{n^2\pi}\cos(nx)

1. $x \mapsto \pi - x$, $x \in [0, \pi]$. \sum_{n=1}^\infty\frac{2}{n}\sin(nx)
2. $x \mapsto \begin{cases} x & \text{for} \quad 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2} & \text{for} \quad \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$ a_0=\frac{3\pi}{8} a_{4n-3}=-\frac{2}{(4n-3)^2\pi} a_{4n-2}=-\frac{1}{(2n-1)^2\pi} a_{4n-1}=-\frac{2}{(4n-1)^2\pi} a_{4n}=0 b_{2n-1}=\frac{1}{2n-1}+\frac{2}{(2n-1)^2\pi} b_{2n}=-\frac{1}{2n}
3. $x \mapsto \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{for} \quad 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ -x + \pi & \text{for} \quad \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$ Let's denote the Fourier coefficients with c_n and d_n instead of a_n and b_n. Then: c_0=a_0 c_n=(-1)^n a_n d_n=(-1)^n b_n with a_n and b_n as in 2.

Vis, at de lige og ulige Fourierrækker for funktion nr. 3 kan fås udfra Fourierrækkerne for funktion nr. 2.

Opgave 4

Brug resultatet fra Opgave 1 om $x \mapsto x^2$'s Fourierrække til at vise, at

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots .$$

Plug in x=1 and isolate.

Exercise 1

Determine whether the following functions are even, odd, or neither.

1. $x \mapsto e^x$
2. $x \mapsto e^{-|x|}$
3. $x \mapsto x^3 \cos(nx)$
4. $x \mapsto x^2 \tan(\pi x)$
5. $x \mapsto \sinh(x) - \cosh(x)$
6. $x \mapsto x^2$, $x \in (-1, 1)$
7. $x \mapsto \begin{cases} -x - \pi & \text{for} \quad -\pi < x < -\frac{\pi}{2} \\ x & \text{for} \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ -x + \pi & \text{for} \quad \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$

In the last two cases, find the Fourier series with period $p = 2$ resp. $p = 2\pi$.

Exercise 2

Show using Fourier expansion that $\cos^3(x) = \frac{3}{4}\cos(x) + \frac{1}{4}\cos(3x)$ and that $\sin^3(x) = \frac{3}{4}\sin(x) - \frac{1}{4}\sin(3x)$. What is the Fourier series of $x \mapsto \cos^4(x)$?

Exercise 3

In the following, we consider function that are initially only defined on $[0, \pi]$. We want to compute even resp. odd halfsided Fourier expansions with period $p = 2\pi$, corresponding to cosine - and sine only expansions. Sketch the even and odd 2π-periodic expansions of the following functions and compute their Fourier series.

1. $x \mapsto \pi - x$, $x \in [0, \pi]$.
2. $x \mapsto \begin{cases} x & \text{for} \quad 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2} & \text{for} \quad \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$
3. $x \mapsto \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{for} \quad 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ -x + \pi & \text{for} \quad \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$

Show that the even and odd Fourier expansions of function no. 3 can be found by examining the Fourier expansions of function no. 2.

Exercise 4

Use the result of Exercise 1 about the Fourier series of $x \mapsto x^2$ to show that

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots .$$