Matematisk modellering og numeriske metoder
Opgaver til Lektion 1

Morten Grud Rasmussen

14. september 2016

Opgave 1

Afgør, hvilke af følgende ligninger, der er ODE'er:

1. $y^2(x) + y(x) - 2\exp(y(x)) = 0$
2. $\frac{\partial y}{\partial x}(x, t) = \sin(xt)$
3. $y^2(x) + y(x) - 2\exp(y'(x)) = 0$
4. $y''(x) + y(x) = 2\exp(y(x))$
5. $y^{(6)}(x) + y(x) = 2\exp(y(x))$
6. $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x) = \sin(xy(x))$

For alle ODE'er skal ordenen desuden bestemmes, og for ODE'er af første orden skal det desuden afgøres, om ODE'en er på implicit eller eksplicit form, eller ingen af delene.

Opgave 2

Definé r en funktion f, så $x^{-3}y'(x) - 4y(x)^2 = 0$ kan skrives på den eksplicitte form $y'(x) = f(x, y(x))$.

Opgave 3

Vis, at:

1. $y'(x) = y(x) + x$ har løsningen $y(x) = -x + c \cdot e^x - 1$.
2. $y'(x) = x - y(x)$ har løsningen $y(x) = x + c \cdot e^{-x} - 1$.

Find desuden løsningen til begyndelsesværdiproblemerne givet ved ovenstående differentialligninger og $y(0) = k$, hvor $k \in \mathbb{R}$ er en konstant.

Opgave 4

Løs følgende differentialligninger efter bedste evne:

1. $y'(x) + 2\sin(2\pi x) = 0$
2. $y'(x) = y$

Opgave 5

Et objekt i frit[1] fald udsættes for en konstant acceleration, $g = 9{,}8\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$, kaldet tyngdeaccelerationen. Opstil en ODE for $y(t)$, den tilbagelagte distance siden $t = 0$, af et fritfaldende objekt til tiden t. Vis, at hvis objektet til tiden $t = 0$ er i hvile, dvs. $y'(0) = 0$, så er løsningen

$$y(t) = \frac{1}{2}gt^2.$$

Opgave 6

Find den generelle løsning til $y(x)y'(x)+36x = 0$. Tjek efter ved at indsætte din løsning i ligningen.

Opgave 7

Benyt noternes Eksempel 3.2 til at udregne, hvor stor en andel af den oprindelige ${}^{14}_{6}\mathrm{C}$, der bør være tilbage i et træ, som antages at være afgået ved døden for 3000 år siden.

Opgave 8

Gompertzmodellen er en ODE, som beskriver vækst i en tumor som funktion af tid og er givet ved $y'(t) = -Ay(t)\ln(y(t))$, hvor $A > 0$ og $y(t)$ er størrelsen af tumoren til tiden t. Betragt modellen og diskutér vækst, skrumpning og stilstand for tumorer. Løs ODE'en.

Exercise 1

Determine which of the following equations are ODE's:

1. $y^2(x) + y(x) - 2\exp(y(x)) = 0$
2. $\frac{\partial y}{\partial x}(x,t) = \sin(xt)$
3. $y^2(x) + y(x) - 2\exp(y'(x)) = 0$
4. $y''(x) + y(x) = 2\exp(y(x))$
5. $y^{(6)}(x) + y(x) = 2\exp(y(x))$

[1] helt frit – heller ingen luftmodstand

6. $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x) = \sin(xy(x))$

For each ODE, determine the order of the ODE. If the ODE is a first order ODE, determine whether the ODE is an implicit or explicit ODE (or neither).

Exercise 2

Find a function f such that $x^{-3}y'(x) - 4y(x)^2 = 0$ can be rephrased as an explicit ODE, $y'(x) = f(x, y(x))$.

Exercise 3

Show that

1. $y'(x) = y(x) + x$ has the solution $y(x) = -x + c \cdot e^x - 1$.
2. $y'(x) = x - y(x)$ has the solution $y(x) = x + c \cdot e^{-x} - 1$.

Furthermore, find the solution to the initial value problems given by the above ODE's and $y(0) = k$, where $k \in \mathbb{R}$ is a constant.

Exercise 4

Try to solve the following ODE's:

1. $y'(x) + 2\sin(2\pi x) = 0$
2. $y'(x) = y$

Exercise 5

A free-falling object[2] is subject to a constant acceleration, $g = 9.8\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$, the gravitational acceleration. Model this as an ODE for $y(t)$, the distance fallen as a function of time t. Show that, if the object at $t = 0$ is at rest, i.e. $y'(0) = 0$, then

$$y(t) = \frac{1}{2}gt^2.$$

Exercise 6

Find the general solution to $y(x)y'(x) + 36x = 0$. Check that your solution satisfies the ODE.

[2] completely free-falling – no air resistance

Exercise 7

Follow Example 4 in Section 1.3 of the book to calculate how big a percentage of the original ${}^{14}_{6}\mathrm{C}$ is left in a fossilized tree which died 3000 years ago.

Exercise 8

The Gompertz model is an ODE which describes the growth of a tumor as a function of time and is given by $y'(t) = -Ay(t)\ln(y(t))$, where $A > 0$ and $y(t)$ is the size of the tumor at time t. Use the model to discuss growth and shrinkage of tumors and find constant solutions. Solve the ODE.