Matematisk modellering og numeriske metoder
Opgaver til Lektion 10

Morten Grud Rasmussen

2. november 2016

Opgave 1

Eftervis, at følgende funktioner opfylder de tilhørende PDE'er.

1. u givet ved $u(x,t) = \cos(4t)\sin(2x)$ løser den en-dimensionelle bølgeligning for et passende valg af c.

2. u givet ved $u(x,t) = e^{-\omega^2 c^2 t}\cos(\omega x)$ løser den en-dimensionelle varmeligning for et passende valg af c.

3. u givet ved $u(x,t) = v(x+ct) + w(x-ct)$ løser den en-dimensionelle bølgeligning for et passende valg af c og alle to gange differentiable funktioner v og w.

4. u givet ved $u(x,y) = \frac{y}{x}$ løser den to-dimensionelle Poisson-ligning med f givet ved $f(x,y) = \frac{2y}{x^3}$.

5. u givet ved $u(x,y) = -\sin(xy)$ løser den to-dimensionelle Poisson-ligning med f givet ved $f(x,y) = (x^2+y^2)\sin(xy)$.

6. u givet ved $u(x,y) = e^{x^2-y^2}$ løser den to-dimensionelle Poisson-ligning med f givet ved $f(x,y) = 4(x^2+y^2)e^{x^2-y^2}$.

7. u givet ved $u(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ løser den to-dimensionelle Poisson-ligning med f givet ved $f(x,y) = (x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}$.

8. u givet ved $u(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ løser den tre-dimensionelle Laplace-ligning.

9. u givet ved $u(x,y) = \ln(x^2+y^2)$ løser den to-dimensionelle Laplace-ligning.

Bemærk, at mens $u(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ løser den tre-dimensionelle *Laplace*-ligning, løser den ellers meget lignende $u(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ en to-dimensionel *Poisson*-ligning.

Opgave 2

Hvordan afhænger frekvensen af fundamentaltilstanden af en vibrerende streng af længden af strengen og af strengens masse per længdeenhed? Hvad sker der, hvis man fordobler trækkraften på strengen? Hvorfor er en kontrabas større end en violin?

Opgave 3

Hvad sker der, hvis vi ændrer på de forskellige antagelser, vi brugte, da vi udledte bølgeligningen? Er de alle sammen nødvendige?

Opgave 4

For at se idéerne, som indgik i udledningen af løsningen af bølgeligningen, mere klart, kan du nedskrive udledningen af løsningen som gennemgået i noterne med $L = \pi$, da dette medfører betragtelige forenklinger.

Opgave 5

Find løsningen til bølgeligningen, hvor $L = 1$, $c^2 = 1$, begyndelseshastigheden $g \equiv 0$ og begyndelsesforvridningen f er givet ved

1. $f(x) = \sin(3\pi x)$
2. $f(x) = 0.01 \sin(3\pi x)$
3. $f(x) = x(1 - x)$
4. $f(x) = \begin{cases} 0.2x & \text{for} \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ -0.2x + 0.2 & \text{for} \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$

Exercise 1

Show that the following functions satisfies the corresponding PDE's.

1. u given by $u(x, t) = \cos(4t) \sin(2x)$ solves the one-dimensional wave equation for a suitable choice of c.
2. u given by $u(x, t) = e^{-\omega^2 c^2 t} \cos(\omega x)$ solves the one-dimensional heat equation for a suitable choice of c.
3. u given by $u(x, t) = v(x + ct) + w(x - ct)$ solves the one-dimensional wave equation for a suitable choice of c and all twice differentiable functions v and w.
4. u given by $u(x, y) = \frac{y}{x}$ solves the two-dimensional Poisson equation with f given by $f(x, y) = \frac{2y}{x^3}$.

5. u given by $u(x,y) = -\sin(xy)$ solves the two-dimensionelle Poisson equation with f given by $f(x,y) = (x^2+y^2)\sin(xy)$.

6. u given by $u(x,y) = e^{x^2-y^2}$ solves the two-dimensional Poisson equation with f given by $f(x,y) = 4(x^2+y^2)e^{x^2-y^2}$.

7. u given by $u(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ solves the two-dimensional Poisson equation with f given by $f(x,y) = (x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}$.

8. u given by $u(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ solves the three-dimensional Laplace equation.

9. u given by $u(x,y) = \ln(x^2+y^2)$ solves the two-dimensional Laplace equation.

Notice that while $u(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ solves the three-dimensional *Laplace* equation, the very similar $u(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ solves the two-dimensional *Poisson* equation.

Exercise 2

How does the frequency of the fundamental mode of the vibrating string depend on the length of the string? On the mass per unit length? What happens if we double the tension? Why is a contrabass larger than a violin?

Exercise 3

What happens if we change the different assumptions we used under the derivation of the wave equation? Are they all necessary?

Exercise 4

To see the ideas used in the derivation of the wave equation more clearly, try going through all the steps of the derivation in the special case where $L = \pi$.

Exercise 5

Find the solution of the wave equation, where $L = 1$, $c^2 = 1$, the initial velocity $g \equiv 0$ and the initial deflection f is given by

1. $f(x) = \sin(3\pi x)$

2. $f(x) = 0.01\sin(3\pi x)$

3. $f(x) = x(1-x)$

4. $f(x) = \begin{cases} 0.2x & \text{for} \quad 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ -0.2x + 0.2 & \text{for} \quad \frac{1}{2} \le x \le 1 \end{cases}$