Matematisk modellering og numeriske metoder
Opgaver til Lektion 11

Morten Grud Rasmussen

8. november 2016

Opgave 1

Tegn løsningen til den én-dimensionelle bølgeligning på intervallet $[0,1]$ med $c^2 = \frac{T}{\rho} = 1$ til forskellige faste tidspunkter (eksempelvis $t = 0.1$, $t = 0.2$, $t = 0.3$ osv.), når begyndelseshastigheden er 0 og udsvinget i $t = 0$ er $u(x,0) = \sin(\pi x)$.

Opgave 2 – Svær

ADVARSEL: Svær opgave! Kast jer evt. over uløste opgaver fra tidligere i stedet. Dette er en øvelse udi produktmetoden. Betragt den én-dimensionelle bølgeligning $u_{tt} = c^2 u_{xx}$, men med randbetingelsen $u(0,t) = 0$ (som før) og $u_x(L,t) = 0$ (ikke som før). Vis, at hvis begyndelseshastigheden er 0, mens begyndelsesudsvinget er $u(x,0) = f(x)$ (bemærk, at dette medfører, at f må opfylde, at $f'(L) = 0$), så er

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{2n+1}{2L}x\right)\cos\left(\frac{2n+1}{2L}ct\right),$$

hvor

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{2n+1}{2L}x\right)\mathrm{d}x$$

en løsning. (Nu kommer det svære:) Vis, at alle løsninger har denne form.

Exercise 1

Sketch the solution to the one-dimensional wave equation on the interval $[0,1]$ with $c^2 = \frac{T}{\rho} = 1$ at different fixed times (e.g. $t = 0.1$, $= 0.2$, $t = 0.3$ etc.), when the intial velocity is 0 and the initial deflection is $u(x,0) = \sin(\pi x)$.

Exercise 2 – Difficult

WARNING: Difficult exercise! Consider solving unsolved problems from earlier lectures instead. The is an exercise in the product method. Consider the one-dimensional wave equation $u_{tt} = c^2 u_{xx}$, but with the boundary condition $u(0,t) = 0$ (as before) and $u_x(L,t) = 0$ (*not* as before). Show that if the initial velocity is 0 while the initial deflection is $u(x,0) = f(x)$ (meaning that $f'(L)$ must be zero), then

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{2n+1}{2L}x\right) \cos\left(\frac{2n+1}{2L}ct\right),$$

where

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \sin\left(\frac{2n+1}{2L}x\right) \mathrm{d}x$$

is a solution. Now for the difficult part: Show that *all* solutions to this problem has that form!