Matematisk modellering og numeriske metoder
Opgaver til Lektion 12

Morten Grud Rasmussen

8. november 2016

Opgave 1

Hvordan afhænger henfaldshastigheden af $u_n(x,t) = b_n \sin(\frac{n\pi}{L}x)e^{-\lambda_n^2 t}$ for fast n af den specifikke varmekapacitet, tætheden og varmeledningsevnen af materialet?

Opgave 2

Sammenlign varme- og bølgeligningerne mht. opførslen af deres egenfunktioner samt begyndelsesværdi- og randbetingelser.

Opgave 3

Løs den én-dimensionelle varmeligning på $[0, 10]$ med randbetingelsen $u(0,t) = u(10,t) = 0$, $\rho = 10{,}6$, $K = 1{,}04$, $\sigma = 0{,}056$ og begyndelsesværdibetingelse hhv.

1. $u(x, 0) = 0{,}1 \sin(\frac{\pi x}{10})$
2. $u(x, 0) = x(10 - x)$

Opgave 4

Tjek, at $u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(\frac{n\pi}{L}x)e^{-(\frac{cn\pi}{L})^2 t}$ løser varmeligningen på $[0,L]$ med randbetingelser $u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0$ og begyndelsesbetingelse $u(x, 0) = f(x)$, hvor a_n er Fourierkoefficienterne fra den halvsidige $\cos$-udvikling af funktionen f, såfremt det antages, at det er tilladt at differentiere den uendelige sum ledvist.

Find løsningen, når $L = \pi$, $c = 1$ og f er givet ved hhv.

1. $f(x) = 1$
2. $f(x) = 1 - \frac{x}{\pi}$

Exercise 1

How does the rate of decay of $u_n(x,t) = b_n \sin(\frac{n\pi}{L}x)e^{-\lambda_n^2 t}$ for fixed n depend on the specific heat capacity, the density and the thermal conductivity of the material?

Exercise 2

Compare the heat and the wave equations with respect to the general behavior of their eigenfunctions and kind of intial and boundary conditions.

Exercise 3

Solve the one-dimensional heat equation on $[0, 10]$ with the boundary condition $u(0,t) = u(10,t) = 0$, $\rho = 10.6$, $K = 1.04$, $\sigma = 0.056$ and intital conditions

1. $u(x, 0) = 0.1 \sin(\frac{\pi x}{10})$
2. $u(x, 0) = x(10 - x)$

respectively.

Exercise 4

Check that $u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(\frac{n\pi}{L}x)e^{-(\frac{cn\pi}{L})^2 t}$ solves the heat equation on $[0, L]$ with boundary conditions $u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0$ and intial condition $u(x,0) = f(x)$, where the a_n are the Fourier coefficients from the half-range $\cos$-expansion of the function f, assuming that one can differentiate the infinite sum term-wise.

Find the solution when $L = \pi$, $c = 1$ and f is given by

1. $f(x) = 1$
2. $f(x) = 1 - \frac{x}{\pi}$

respectively.