

# Matematisk modellering og numeriske metoder

## Opgaver til Lektion 13

Morten Grud Rasmussen

16. november 2016

### Opgave 1

Betragt kvadratet med sidelængde 4,  $0 \leq x \leq 4$ ,  $0 \leq y \leq 4$ . Antag, at temperaturen er  $0^\circ\text{C}$  langs øverste og nederste kant, mens temperaturen er  $50^\circ\text{C}$  langs venstre og højre kant. Find temperaturen i de indre punkter, hvor du benytter et maskestørrelse med  $h = 1$ .

Løs samme opgave men med randbetingelserne  $\sin(\frac{1}{4}\pi x)$  for  $y = 0$  og  $y = 4$ , og  $-\sin(\frac{1}{4}\pi y)$  for  $x = 0$  og  $x = 4$ .

### Opgave 2

Find ved hjælp af metoderne fra lektionen en numerisk løsning til Laplace-ligningen på rektanglet  $0 \leq x \leq 1.5$ ,  $0 \leq y \leq 1$  med  $h = 0.5$  og de blandede randbetingelser  $u_x = 0$  for  $x = 0$ ,  $u_x = 3$  for  $x = 1.5$ ,  $u = x^2$  for  $y = 0$  og  $u = x^2 - 1$  for  $y = 1$ .

### Opgave 3

Find vha. metoderne fra lektionen en numerisk løsning med gitterstørrelse  $h = 1$  til Poisson-ligningen  $\nabla^2 u = 2$  i firkanten, som er givet ved de fire linjer  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $y = 3 - \frac{1}{2}x$  og  $x = 3$ , med randbetingelser  $u = y^2 - 3y$  for  $x = 0$ ,  $u = 0$  for  $y = 0$ ,  $u = 0$  for  $y = 3 - \frac{1}{2}x$  og  $u = y^2 - 1.5y$  for  $x = 3$ .

### Exercise 1

Consider the square with side length 4;  $0 \leq x \leq 4$ ,  $0 \leq y \leq 4$ . Assume that the temperature is  $0^\circ\text{C}$  along the top and bottom edges, while the temperature is  $50^\circ\text{C}$  along the left and right edges. Find the temperature inside the square using a grid size corresponding to  $h = 1$ .

Solve the same problem with the boundary conditions  $\sin(\frac{1}{4}\pi x)$  for  $y = 0$  and  $y = 4$ , and  $-\sin(\frac{1}{4}\pi y)$  for  $x = 0$  and  $x = 4$ .

## Exercise 2

Find a numerical solution to the Laplace equation on the rectangle  $0 \leq x \leq 1.5, 0 \leq y \leq 1$  with  $h = 0.5$  and mixed boundary conditions  $u_x = 0$  for  $x = 0$ ,  $u_x = 3$  for  $x = 1.5$ ,  $u = x^2$  for  $y = 0$  and  $u = x^2 - 1$  for  $y = 1$ .

## Exercise 3

Find a numerical solution on a mesh with  $h = 1$  to the Poisson equation  $\nabla^2 u = 2$  in the bounded region given by the four lines  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $y = 3 - \frac{1}{2}x$  og  $x = 3$ , with boundary conditions  $u = y^2 - 3y$  for  $x = 0$ ,  $u = 0$  for  $y = 0$ ,  $u = 0$  for  $y = 3 - \frac{1}{2}x$  and  $u = y^2 - 1.5y$  for  $x = 3$ .