Matematisk modellering og numeriske metoder
Opgaver til Lektion 15

Morten Grud Rasmussen

18. november 2016

Opgave 1

Find andengradspolynomiet p_2 gennem punkterne $(1.00, 1.000)$, $(1.02, 0.9888)$ og $(1.04, 0.9784)$ vha. Lagrange-interpolation. Beregn herefter $p_2(1.01)$ og $p_2(1.03)$.

Opgave 2

Alle nedenstående interpolationspolynomier skal findes vha. Lagrange-interpolation.

1. Find en approksimation af $e^{-0.25}$ vha. førstegradsinterpolationspolynomiet p_1 givet ved de to punkter $(0.0, e^{-0.0})$ og $(0.5, e^{-0.5})$ (altså førstegradsinterpolationspolynomiet af funktionen $x \mapsto e^{-x}$ i punkterne $x_0 = 0.0$ og $x_1 = 0.5$).

2. Find en approksimation af $e^{-0.75}$ vha. førstegradsinterpolationspolynomiet $\tilde{p}_1$ givet ved de to punkter $(0.5, e^{-0.5})$ og $(1.0, e^{-1.0})$ (altså førstegradsinterpolationspolynomiet af funktionen $x \mapsto e^{-x}$ i punkterne $x_0 = 0.5$ og $x_1 = 1.0$).

3. Find nu approksimationer af $e^{-0.25}$ og $e^{-0.75}$ vha. andengradsinterpolationspolynomiet af $x \mapsto e^{-x}$ i punkterne $x_0 = 0.0$, $x_1 = 0.5$ og $x_2 = 1.0$.

4. Estimér fejlen på resultaterne ved at sammenligne de forskellige resultater.

Opgave 3

Find et interpolationspolynomium p_2 af punkterne $(0.25, 0.27633)$, $(0.50, 0.52050)$ og $(1.0, 0.84270)$ vha. Lagrange-interpolation. Disse punkter er taget fra den såkaldte *fejlfunktion*, hvis værdi i 0.75 er med fem betydende cifre 0.71116. Hvad er $p_2(0.75)$?

Opgave 4

Udregn funktionerne L_0, L_1, L_2 og L_3 fra Lagrange-interpolationsmetoden når $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ og $x_3 = 3$. Skitsér funktionerne på samme koordinatsystem. Find Lagrange-interpolations-polynomiet p_3 for datapunkterne $(0, 1.000000)$, $(1, 0.765198)$, $(2, 0.223891)$ og $(3, -0.260052)$. Disse datapunkter stammer fra den såkaldte Besselfunktion J_0. Estimér $J_0(0.5)$, $J_0(1.5)$ og $J_0(2.5)$. De korrekte værdier er med seks betydende cifre 0.938470, 0.511828 og -0.0483838, hhv.

Opgave 5

Løs sidstnævnte opgave vha. Newtons *forward difference*-metode.

Opgave 6

Løs efter eget valg nogle af ovenstående opgaver vha. Newtons divideret differens-metode i stedet for Lagrange-interpolation.

Exercise 1

Find the second-order polynomial p_2 through the points $(1.00, 1.000)$, $(1.02, 0.9888)$ and $(1.04, 0.9784)$ using Lagrange interpolation. Find $p_2(1.01)$ and $p_2(1.03)$.

Exercise 2

Find the following interpolation polynomials using Lagrange interpolation.

1. Find an approximation of $e^{-0.25}$ using the first-order interpolation polynomial p_1 given by the two points $(0.0, e^{-0.0})$ and $(0.5, e^{-0.5})$ (i.e. the first-order polynomial of the function $x \mapsto e^{-x}$ through $x_0 = 0.0$ and $x_1 = 0.5$).

2. Find an approximation of $e^{-0.75}$ usng the first-order polynomial $\tilde{p}_1$ given by the two points $(0.5, e^{-0.5})$ and $(1.0, e^{-1.0})$.

3. Now find approximations of $e^{-0.25}$ and $e^{-0.75}$ using the second-order polynomial of $x \mapsto e^{-x}$ at the points $x_0 = 0.0$, $x_1 = 0.5$, and $x_2 = 1.0$.

4. Estimate the error on the results by comparing the different results.

Exercise 3

Find an interpolation polynomial p_2 through the points $(0.25, 0.27633)$, $(0.50, 0.52050)$, and $(1.0, 0.84270)$ using Lagrange-interpolation. These points are taken from the so-called *error function*, whose vaule at 0.75 is 0.71116. What is $p_2(0.75)$?

Exercise 4

Compute the functions L_0, L_1, L_2 og L_3 from the Lagrange interpolation methoden when $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, and $x_3 = 3$. Sketch the functions on the same axes. Find the Lagrange interpolation polynomial p_3 for the data points $(0, 1.000000)$, $(1, 0.765198)$, $(2, 0.223891)$, and $(3, -0.260052)$. These data points come from the so-called Bessel function J_0. Estimate $J_0(0.5)$, $J_0(1.5)$, and $J_0(2.5)$. The correct values are with 6 significant digits 0.938470, 0.511828, and -0.0483838.

Exercise 5

Solve Exercise 4 using Newtons *forward difference* method.

Exercise 6

Solve some of the exercises using Newton's divided difference method instead of the Langrange method.