

Matematisk modellering og numeriske metoder

Opgaver til Lektion 18

Morten Grud Rasmussen

29. november 2016

Opgave 1

Anvend Eulers metode på

$$y' + 0.2y = 0, \quad y(0) = 5,$$

med skridtlængde $h = 0.2$ og 10 skridt. Løs også ODE'en analytisk og sammenlign med den numeriske løsning.

Opgave 2

Anvend Heuns metode på

$$y'(x) - xy(x)^2 = 0, \quad y(0) = 1,$$

med skridtlængde $h = 0.1$ og 10 skridt. Løs også ODE'en analytisk og sammenlign med den numeriske løsning. Anvend nu RK4 på ODE'en med skridtlængde $h = 0.1$ og 10 skridt, samt med skridtlængde $h = 0.2$ og 5 skridt. Benyt de to forskellige RK4-løsninger til at estimere fejlen på den med skridtlængde $h = 0.1$. Sammenlign med den rigtige fejl.

Opgave 3

Anvend Eulers metode, Heuns metode og RK4 på

$$y'(x) = (y - 0.01x^2)^2 \sin(x^2) + 0.02x, \quad y(0) = 0.4,$$

med skridtlængde $h = 0.2$ og 25 skridt (dvs. op til $x = 5.0$). Den eksakte værdi med seks betydende cifre i $x = 1$, $x = 3$ og $x = 5$ er

$$y(1) = 0.466677, \quad y(3) = 0.669227 \quad \text{og} \quad y(5) = 0.757078.$$

Sammenlign med de numeriske resultater.

Exercise 1

Apply the Euler method on

$$y' + 0.2y = 0, \quad y(0) = 5,$$

with step length $h = 0.2$ and 10 steps. Also solve the ODE analytically and compare with the numerical solution.

Exercise 2

Apply Heun's method on

$$y'(x) - xy(x)^2 = 0, \quad y(0) = 1,$$

with step length $h = 0.1$ and 10 steps. Also solve the ODE analytically and compare with the numerical solution. Now apply RK4 on the ODE with step length $h = 0.1$ and 10 steps, and with step length $h = 0.2$ and 5 steps. Use the two different RK4 solutions to estimate the error on the solution with step length $h = 0.1$. Compare with the real error.

Exercise 3

Apply the Euler method, Heun's method and RK4 on

$$y'(x) = (y - 0.01x^2)^2 \sin(x^2) + 0.02x, \quad y(0) = 0.4,$$

with step length $h = 0.2$ and 25 steps (i.e. up to $x = 5.0$). The exact values with six significant digits at $x = 1$, $x = 3$, and $x = 5$ are

$$y(1) = 0.466677, \quad y(3) = 0.669227 \quad \text{og} \quad y(5) = 0.757078.$$

Compare with the numerical values.