Matematisk modellering og numeriske metoder
Opgaver til Lektion 2

Morten Grud Rasmussen

14. september 2016

Opgave 1

Evaluér funktionen f givet ved

$$f(x) = x^3 - 7{,}5x^2 + 11{,}2x + 2{,}8 \tag{1}$$
$$= ((x - 7{,}5)x + 11{,}2)x + 2{,}8 \tag{2}$$

i $x = 3{,}94$, hvor alle deludregninger foretages med tre betydende cifre og afrunding. Benyt først udtrykket (1) og dernæst udtrykket (2). Sammenlign de to værdier med den rigtige værdi. Hvilken metode er bedst? Hvorfor?

Opgave 2

Løs $x^2 - 40x + 2 = 0$, hvor alle deludregninger foretages med fire betydende cifre.

Opgave 3

Skitsér funktionen f givet ved $f(x) = x^3 - 5{,}00x^2 + 1{,}01x + 1{,}88$ og konstatér, at der er nulpunkter nær ± 1 og 5. Definér g ved $g(x) = (5{,}00x^2 - 1{,}01x - 1{,}88)/x^2$ og bemærk, at $g(x) = x$ for netop de x'er, hvor $f(x) = 0$. Find rødder for f ved at benytte fikspunktsiteration på g startende med $x_0 = 5, 4, 1, -1$, hhv. Løs også problemet vha. Newtons metode og sekantmetoden.

Opgave 4

Skitsér funktionen f givet ved $f(x) = 1 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{64}x^4 - \frac{1}{2304}x^6$ og konstatér, at der er nulpunkt nær $x = 2$. Dividér $f(x) = 0$ med $\frac{1}{4}x$ på begge sider af lighedstegnet, isolér x i det resulterende udtryk ved at flytte alle andre led over på den anden side, og find nulpunktet for f nær $x = 2$ ved iterationsmetoden og udgangspunktet $x_0 = 2$. Løs også problemet vha. Newtons metode og sekantmetoden.

Opgave 5

Brug midtpunktsreglen på $\int_0^1 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ med $n = 10$ inddelinger.

Udled formler for en nedre og en øvre grænse for midtpunktsreglen (vink: midtpunktsreglen approksimerer med nultegradspolynomier – kan du vurdere integranten nedefra og oppefra med nultegradspolynomier?). Benyt formlen på det konkrete integral ovenfor.

Opgave 6

Brug trapezreglen på $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ med $n = 4$ og $n = 8$ inddelinger. Estimér fejlen på sidstnævnte.

Exercise 1

Evaluate the function f given by

$$f(x) = x^3 - 7.5x^2 + 11.2x + 2.8 \tag{3}$$
$$= ((x - 7.5)x + 11.2)x + 2.8 \tag{4}$$

at $x = 3.94$, where all computations are performed with three significant digits and round-off. First use the expression (3), and then the expression (4). Compare the two values with the exact value. Which method is best? Why?

Exercise 2

Solve $x^2 - 40x + 2 = 0$ where all computations are performed with four significant digits.

Exercise 3

Sketch the function f given by $f(x) = x^3 - 5.00x^2 + 1.01x + 1.88$ and note that it has roots near ± 1 and 5. Define g by $g(x) = (5.00x^2 - 1.01x - 1.88)/x^2$ and note that $g(x) = x$ exactly when $f(x) = 0$. Find roots of f using fixed-point iteration on g starting with $x_0 = 5, 4, 1, -1$, respectively. Also solve the problem using Newton's – and the secant method.

Exercise 4

Sketch the function f given by $f(x) = 1 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{64}x^4 - \frac{1}{2304}x^6$ and note that it has a root near $x = 2$. Divide $f(x) = 0$ by $\frac{1}{4}x$ on both sides of the equation, isolate x in the resulting expression by moving all other terms to the other side and find the root of f near $x = 2$ using fixed-point iteration starting with $x_0 = 2$. Also solve the problem using Newton's – and the secant method.

Exercise 5

Apply the rectangular rule on $\int_0^1 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ with $n = 10$ subdivisions.

Develop formulas for a lower and an upper bound for the rectangular rule. Apply the formulas on the integral above.

Exercise 6

Apply the trapezoidal rule on $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ with $n = 4$ and $n = 8$ subdivisions. Estimate the error in the latter case.