

Matematisk modellering og numeriske metoder

Opgaver til Lektion 3

Morten Grud Rasmussen

18. september 2016

Opgave 1

Afgør for hver af følgende ODE'er, om der findes en løsning, og hvor mange løsninger, der i givet fald eksisterer for et givet begyndelsesværdiproblem.

1. $y'(x) + ky(x) = e^{-kx}$
2. $y'(x) + y(x) \sin(x) = e^{\cos(x)}$
3. $y'(t) + \frac{2}{t}y(t) = t - 1 + \frac{1}{t}$
4. $y'(x) - \frac{y(x)}{x} = 1$
5. $y'(x) - \frac{3y(x)}{x} = x$
6. $y'(t) + 2ty(t) = -2t^3$

Find endvidere en partikulær løsning til ODE nr. 2, som opfylder, at $y(0) = -2,5$.

Opgave 2

Vis, at $x \mapsto \cos(2,5x)$ og $x \mapsto \sin(2,5x)$ er lineært uafhængige funktioner, og at de begge er løsninger til

$$4y''(x) + 25y(x) = 0.$$

Løs ODE'en med begyndelsesbetingelserne $y(0) = 3,0$ og $y'(0) = -2,5$.

Opgave 3

Løs ODE'en

$$y''(x) - 25y(x) = 0.$$

Opgave 4

Find a og b så $x \mapsto e^{-\sqrt{5}x}$ og $x \mapsto xe^{-\sqrt{5}x}$ udgør en basis for løsningsrummet til

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = 0.$$

Opgave 5

Løs begyndelsesværdiproblemet

$$y''(x) - 3y'(x) - 4y(x) = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 1.$$

Opgave 6

Løs

$$y''(x) - y(x) = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1,$$

og derefter

$$y''(x) - y(x) = 0, \quad y(0) = 1,001, \quad y'(0) = -0,999.$$

Forklar, hvorfor der er så stor forskel på opførslen af de to løsninger.

Exercise 1

Determine for each of the following ODE's whether they have a solution, and if so, how many different solutions satisfying the same initial conditions.

1. $y'(x) + ky(x) = e^{-kx}$
2. $y'(x) + y(x) \sin(x) = e^{\cos(x)}$
3. $y'(t) + \frac{2}{t}y(t) = t - 1 + \frac{1}{t}$
4. $y'(x) - \frac{y(x)}{x} = 1$
5. $y'(x) - \frac{3y(x)}{x} = x$
6. $y'(t) + 2ty(t) = -2t^3$

Furthermore, find a particular solution for ODE no. 2 satisfying $y(0) = -2.5$.

Exercise 2

Show that $x \mapsto \cos(2,5x)$ and $x \mapsto \sin(2,5x)$ are linearly independent functions, and that both of them are solutions to

$$4y''(x) + 25y(x) = 0.$$

Solve the ODE with initial conditions $y(0) = 3.0$ and $y'(0) = -2.5$.

Exercise 3

Solve the ODE

$$y''(x) - 25y(x) = 0.$$

Exercise 4

Find a and b such that $x \mapsto e^{-\sqrt{5}x}$ and $x \mapsto xe^{-\sqrt{5}x}$ constitutes a basis for the solution space of

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = 0.$$

Exercise 5

Solve the IVP

$$y''(x) - 3y'(x) - 4y(x) = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 1.$$

Exercise 6

Solve first

$$y''(x) - y(x) = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1,$$

and then

$$y''(x) - y(x) = 0, \quad y(0) = 1.001, \quad y'(0) = -0.999.$$

Explain why the two solutions behave so differently.