Matematisk modellering og numeriske metoder
Opgaver til Lektion 4

Morten Grud Rasmussen

19. september 2016

Opgave 1

Hvad er vibrationsfrekvenserne for et masse-fjeder-system, hvor massen er $5\,\mathrm{kg}$ og

1. fjederen har en fjederkonstant $k_1 = 20\,\mathrm{N/m}$,
2. fjederen har en fjederkonstant $k_2 = 45\,\mathrm{N/m}$,
3. begge fjedre ovenfor er monteret, den ene inden i den anden.

Opgave 2

Find en generel løsning til ODE'en $4x^2y''(x) + 5y(x) = 0$.

Opgave 3

Antag, at $b = \frac{1}{4}(a-1)^2$, så $m^2+(a-1)m+b = 0$ har en dobbeltrod i $\frac{1-a}{2}$. Vis ved direkte udregning, at $x^2y''(x) + axy'(x) + by = 0$ i dette tilfælde har løsningen $x \mapsto x^{\frac{1-a}{2}}\ln(x)$.

Antag nu, at $b \neq \frac{1}{4}(a-1)^2$, så $m^2 + (a-1)m + b = 0$ har to forskellige rødder, r_- og r_+. Vis ved direkte udregning, at $x \mapsto x^{r_\pm}\ln(x)$ *ikke* er en løsning til $x^2y''(x) + axy'(x) + by(x) = 0$.

Opgave 4

Find Wronski-determinanten af $f\colon x \mapsto e^{-0{,}5x}$ og $g\colon x \mapsto e^{-2{,}5x}$. Vis ved direkte udregning, at f og g er lineært uafhængige. Vis det derefter vha. Korollar 2.3.

Opgave 5

1. Find en homogen, lineær ODE af anden orden, som har funktionerne $f\colon x \mapsto e^{-2{,}5x}\cos(0{,}5x)$ og $g\colon x \mapsto e^{-2{,}5x}\sin(0{,}5x)$ som løsninger.
2. Vis, at f og g er lineært uafhængige.
3. Find en løsning for den opstillede ODE fra 1., som opfylder begyndelsesværdibetingelserne $y(0) = 1{,}5$ og $y'(0) = -2{,}0$.

Opgave 6

Find generelle løsninger til følgende ODE'er.

1. $y''(x) + 5y'(x) + 6y(x) = 2e^{-x}$
2. $y''(x) + 4y'(x) + 4y(x) = e^{-x}\cos(x)$

Exercise 1

What is the vibrational frequency for a mass-spring system, where the mass is $5\,\mathrm{kg}$ and

1. the spring has spring constant $k_1 = 20\,\mathrm{N/m}$,
2. the spring has spring constant $k_2 = 45\,\mathrm{N/m}$,
3. both springs are attached, one inside the other.

Exercise 2

Find a general solution of the ODE $4x^2y''(x) + 5y(x) = 0$.

Exercise 3

Assume that $b = \frac{1}{4}(a-1)^2$, such that $m^2 + (a-1)m + b = 0$ has a dobble root at $\frac{1-a}{2}$. Show by direct computation that $x^2y''(x) + axy'(x) + by = 0$ in this case has the solution $x \mapsto x^{\frac{1-a}{2}}\ln(x)$.

Assume now that $b \neq \frac{1}{4}(a-1)^2$, such that $m^2 + (a-1)m + b = 0$ has two distinct roots, r_- and r_+. Show by direct computation that $x \mapsto x^{r_\pm}\ln(x)$ *isn't* a solution to $x^2y''(x) + axy'(x) + by(x) = 0$.

Exercise 4

Find the Wronskian of $f\colon x \mapsto e^{-0.5x}$ and $g\colon x \mapsto e^{-2.5x}$. Show by direct computation that f and g are linearly independent. Then show it using the Wronskian.

Exercise 5

1. Find a homogeneous, linear second order ODE which has the functions $f\colon x \mapsto e^{-2{,}5x}\cos(0{,}5x)$ and $g\colon x \mapsto e^{-2{,}5x}\sin(0{,}5x)$ as solutions.
2. Show that f and g are linearly independent.
3. Find a solution to the ODE from 1. which satisfies the initial conditions $y(0) = 1.5$ and $y'(0) = -2.0$.

Exercise 6

Find general solutions to the following ODE's.

1. $y''(x) + 5y'(x) + 6y(x) = 2e^{-x}$
2. $y''(x) + 4y'(x) + 4y(x) = e^{-x}\cos(x)$