Matematisk modellering og numeriske metoder
Opgaver til Lektion 5

Morten Grud Rasmussen

27. september 2016

Opgave 1

Betragt ODE'en
$$4y''(t) + 12y'(t) + 9y(t) = 225 - 75\sin(3t).$$
Hvis vi "homogeniserer" den (altså sætter højresiden lig 0), så kan den tolkes som en model for et masse-fjeder-system med dæmpning. Vi ved, at alle løsninger til denne homogene ligning konvergerer mod 0, når $t \to \infty$. Da samtlige løsninger til den inhomogene ligning kan skrives som en partikulær løsning plus en løsning til den homogene, og alle løsninger til den homogene går mod 0, så må alle løsninger konvergere mod den samme partikulære løsning. Find denne.

Opgave 2

Find den generelle løsning til $y''(t) + 2y(t) = \cos(\sqrt{2}t) + \sin(\sqrt{2}t)$.

Opgave 3

Betragt ODE'en
$$y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = e^{-\frac{t}{2}}\sin(\tfrac{1}{2}t)$$
Find den løsning, som alle løsninger konvergerer imod. Løs begyndelsesværdiproblemet $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$. Plot forskellen på de to løsninger, og se, hvor hurtigt forskellen bliver lille.

Opgave 4

Løs begyndelsesværdiproblemet
$$y''(t) + y(t) = \cos(\omega t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0,$$
hvor $\omega^2 \neq 0$. Vis, at løsningen kan skrives som
$$y(t) = \frac{2}{1-\omega^2}\sin(\frac{1}{2}(1+\omega)t)\sin(\frac{1}{2}(1-\omega)t).$$
Eksperimentér med valget af ω på en lommeregner eller noget andet, der kan plotte grafen for løsningen. Hvad sker der for små ω? For store? For ω^2 tæt på 1?

Exercise 1

Consider the ODE

$$4y''(t) + 12y'(t) + 9y(t) = 225 - 75\sin(3t).$$

If we "homogenize" it (i.e. replace the right-hand side with 0), then it can be interpreted as a mass-spring system with damping. We know that all solutions to this homogeneous equation converges to 0 as $t \to \infty$. As any solution to the inhomogeneous can be written as a particular solution plus a solution to the homogeneous equation, and all homogeneous solutions tend to 0, all solutions will converge towards the same solution. Find that solution.

Exercise 2

Find the general solution to $y''(t) + 2y(t) = \cos(\sqrt{2}t) + \sin(\sqrt{2}t)$.

Exercise 3

Consider the ODE

$$y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = e^{-\frac{t}{2}}\sin(\tfrac{1}{2}t)$$

Find the solution all other solutions converges towards. Solve the initial value problem $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$. Plot the difference of the two solutions and see how fast it tends to 0.

Exercise 4

Solve the initial value problem

$$y''(t) + y(t) = \cos(\omega t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0,$$

where $\omega^2 \neq 0$. Show that the solution can be written as

$$y(t) = \frac{2}{1-\omega^2}\sin(\frac{1}{2}(1+\omega)t)\sin(\frac{1}{2}(1-\omega)t).$$

Do experiments with plotting the solution for different choices of ω on a calculator or a computer What happens for small ω's? For big ones? For ω^2 close to 1?