Matematisk modellering og numeriske metoder
Opgaver til Lektion 8

Morten Grud Rasmussen

25. oktober 2016

Opgave 1

Find fundamentalperioden for følgende funktioner:

1. $x \mapsto \cos(x)$
2. $x \mapsto \sin(x)$
3. $x \mapsto \cos(2x)$
4. $x \mapsto \sin(2x)$
5. $x \mapsto \cos(\pi x)$
6. $x \mapsto \sin(\pi x)$
7. $x \mapsto \cos(2\pi x)$
8. $x \mapsto \sin(2\pi x)$

Find Fourierrækken for de første fire funktioner.

Opgave 2

Genopfrisk integrationsteknikker fra Calculus. Disse skal bruges til at udregne Fourierkoefficienter. Du skal altså kunne integrere funktioner som $x \mapsto x\cos(nx)$, $x \mapsto x^2\sin(nx)$ og $x \mapsto e^{-2x}\cos(nx)$.

Opgave 3

Udvid funktionen f givet ved

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{for} \quad -\pi < x < 0 \\ \pi - x & \text{for} \quad 0 < x < \pi \end{cases}$$

til en 2π-periodisk funktion. Skitsér grafen for f. Udregn herefter f's Fourierkoefficienter. Skitsér partialsummen for f med alle led op til $\cos(5x)$ og $\sin(5x)$.

Opgave 4

Find Fourierrækken for den 2π-periodiske funktion f givet ved

$$f(x) = \begin{cases} x+\pi & \text{for} \quad -\pi < x < 0 \\ -x+\pi & \text{for} \quad 0 < x < \pi \end{cases},$$

og skitsér grafen for de første partialsummer af f's Fourierrække. Gentag succesen med 2π-periodiske g givet ved

$$g(x) = \begin{cases} -x-\pi & \text{for} \quad -\pi < x < 0 \\ -x+\pi & \text{for} \quad 0 < x < \pi \end{cases}.$$

Find værdien af g's Fourierrække i punktet 0 ved først at indsætte 0 i Fourierrækken, dernæst ved at bruge Lektion 8-noternes Sætning 1.7.

Exercise 1

Find the fundamental period of the following functions:

1. $x \mapsto \cos(x)$
2. $x \mapsto \sin(x)$
3. $x \mapsto \cos(2x)$
4. $x \mapsto \sin(2x)$
5. $x \mapsto \cos(\pi x)$
6. $x \mapsto \sin(\pi x)$
7. $x \mapsto \cos(2\pi x)$
8. $x \mapsto \sin(2\pi x)$

Find the Fourier series of the first four functions.

Exercise 2

Revisit integration techniques from Calculus. You need these to compute Fourier coefficients. You should be able to integrate functions like $x \mapsto x\cos(nx)$, $x \mapsto x^2 \sin(nx)$, and $x \mapsto e^{-2x}\cos(nx)$.

Exercise 3

Extend the function f given by

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{for} \quad -\pi < x < 0 \\ \pi - x & \text{for} \quad 0 < x < \pi \end{cases}$$

to a 2π-periodic function. Sketch the graf of f. Compute the Fourier coefficients of f. Sketch the partial sum of f with all terms up to and including $\cos(5x)$ and $\sin(5x)$.

Exercise 4

Find the Fourier series of the 2π-periodic function f given by

$$f(x) = \begin{cases} x + \pi & \text{for} \quad -\pi < x < 0 \\ -x + \pi & \text{for} \quad 0 < x < \pi \end{cases},$$

and sketch the graf of the first partial sums of f's Fourier series. Do the same for the 2π-periodic g given by

$$g(x) = \begin{cases} -x - \pi & \text{for} \quad -\pi < x < 0 \\ -x + \pi & \text{for} \quad 0 < x < \pi \end{cases}.$$

Find the value of the Fourier series of g at the point 0, first by plugging in 0 in the Fourier series, then by using the theorems of the book.