# Matematisk modellering og numeriske metoder

# Lektion 12

Morten Grud Rasmussen

5. november 2016

## 1 Partielle differentialligninger

### 1.1 Nye randbetingelser: isolerede endepunkter

Vi vil nu se på, hvad der sker, hvis man ikke fastholder endepunkterne af metalstangen på en bestemt temperatur, men i stedet isolerer dem, så de ikke kan afgive (eller optage) varme. Antagelse 3 fra lektion 11 var, at varmestrømningen var proportional med gradienten af temperaturen. I vores endimensionelle setup svarer gradienter til partielle $x$-afledede, og isolerede endepunkter svarer til, at varmestrømningen er $0$. Med andre ord betyder isoleringen, at vi i stedet for $u(0,t) = u(L,t) = 0$ har randbetingelsen

$$u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0. \tag{1}$$

Anvendes produktmetoden nu igen ($u(x,t) = F(x)G(t)$ og $F'(0) = F'(L) = 0$), så når man i stedet frem til, at $F$ skal være af typen

$$F(x) = F_n(x) = \cos\Big(\frac{n\pi}{L}x\Big)$$

(evt. ganget med en konstant), således at egenfunktionerne i stedet bliver

$$u_n(x,t) = a_n \cos\Big(\frac{n\pi}{L}x\Big)e^{-\lambda_n^2 t} \quad \text{for} \quad \lambda_n = \frac{cn\pi}{L}, \qquad n \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

*altså inkl.* $n = 0$*!* Vi ser altså, at problemet har $0$ som egenværdi med $f \equiv a_0$ (en vilkårlig konstant funktion) som tilhørende egenfunktion, og vi ser, at vi for at løse begyndelsesværdiproblemer nu i stedet skal anvende Fourierrækker for *lige* funktioner (cosinus-udviklinger) i stedet for *ulige* funktioner (sinus-udviklinger). Løsninger er derfor på formen

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos\Big(\frac{n\pi}{L}x\Big)e^{-\lambda_n^2 t}, \qquad \text{hvor} \qquad \lambda_n = \frac{cn\pi}{L}$$

og

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{samt} \qquad a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\Big(\frac{n\pi}{L}x\Big)\,\mathrm{d}x.$$

Det ses, at alle led – undtagen ($n = 0$)-ledet som er konstant lig $a_0$, som er begyndelsesværdiens gennemsnitsværdi – går mod nul med eksponentiel hastighed. Forklar dette udfra intuitive betragtninger!

## 1.2 Tidsuafhængige varmeledningsproblemer – Laplace-ligningen

Antag, at en varmestrømning er i balance i den forstand, at den ikke ændrer sig over tid. Så er $u_t = 0$ og i to dimensioner ser varmeligningen pludselig således ud:

$$0 = c^2\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Big) \qquad \text{eller blot} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \nabla^2 u = 0,$$

som vi genkender som Laplace-ligningen, vi kort stiftede bekendtskab med i lektion 10. Begyndelsesbetingelsen bortfalder (naturligvis?) i dette tilfælde, og vi står tilbage med et randbetingelsesproblem, som kan være af tre forskellige typer.

**Definition 1.1** (Randbetingelser for Laplace-ligningen)**.** Randbetingelser for Laplace-ligningen inddeles i følgende tre typer.
*Dirichlet-randbetingelser* (eller randbetingelser af første type) er betingelser, hvor $u$ er angivet på randen.
*Neumann-randbetingelser* (eller randbetingelser af anden type) er betingelser, hvor $\nabla u \cdot n$ er angivet på randen, hvor $n$ er en vektor, som står vinkelret på randen.
*Robin-randebetingelser* (eller randbetingelser af tredje type) er betingelser, hvor $u$ er angivet på en del af randen, mens $\nabla u \cdot n$ er angivet på resten af randen.

**Eksempel 1.2.** Vi illustrerer nu Dirichlet-problemet for den todimensionelle Laplace-ligning. Lad $R = [0,a]\times[0,b]$, så randen $S$ består af de fire linjestykker i rummet $L_1 = \{0\}\times[0,b]$, $L_2 = [0,a]\times\{b\}$, $L_3 = \{a\}\times[0,b]$ og $L_4 = [0,a]\times\{0\}$, $S = L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_4$. Antag, at

$$u(0,y) = 0 \quad \text{på } L_1, \quad u(x,b) = f(x) \quad \text{på } L_2, \quad u(a,y) = 0 \quad \text{på } L_3 \quad \text{og} \quad u(x,0) = 0 \quad \text{på } L_4.$$

Igen anvendes produktmetoden, hvor vi antager, at $u(x,y) = F(x)G(y)$. Dette giver ved lidt arbejde og anvendelse af randbetingelserne på $L_1$, $L_3$ og $L_4$

$$F(x) = F_n(x) = \sin\Big(\frac{n\pi}{a}x\Big) \qquad \text{og} \qquad G(y) = G_n(y) = a_n \sinh\Big(\frac{n\pi}{a}y\Big)$$

(bemærk, at den ene er en sinus hyperbolsk!) og dermed egenfunktionerne

$$u_n(x,y) = a_n \sin\Big(\frac{n\pi}{a}x\Big)\sinh\Big(\frac{n\pi}{a}y\Big),$$

som vi summer sammen til

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\Big(\frac{n\pi}{a}x\Big)\sinh\Big(\frac{n\pi}{a}y\Big).$$

Randbetingelserne på $L_2$ giver derfor at

$$u(x,b) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \sinh\Big(\frac{n\pi b}{a}\Big) \right) \sin\Big(\frac{n\pi}{a} x\Big) = f(x).$$

For at dette kan være opfyldt, må $a_n \sinh(\frac{n\pi b}{a})$ være lig Fourier-koefficienterne for $f$ tolket som en *ulige* $2a$-periodisk funktion (da det er sinus-rækken, de indgår i). Altså

$$a_n \sinh\Big(\frac{n\pi b}{a}\Big) = b_n(f) = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \sin\Big(\frac{n\pi}{a} x\Big)\, \mathrm{d}x$$

eller

$$a_n = \frac{b_n(f)}{\sinh(\frac{n\pi b}{a})} = \frac{2}{a \sinh(\frac{n\pi b}{a})} \int_0^a f(x) \sin\Big(\frac{n\pi}{a} x\Big)\, \mathrm{d}x.$$

Vi har igen ikke *bevist*, at dette er en løsning, men dette kan vises, eksempelvis hvis $f$ og $f'$ er kontinuerte, og $f''$ er stykkevist kontinuert.

Vi bemærker afslutningsvist, at også den tidsuafhængige bølgeligning reducerer til Laplace-ligningen, ligesom flere andre naturlige, fysiske problemer gør i det tidsuafhængige tilfælde. Eksempelvis vil også en stillestående sæbehinde være beskrevet af Laplace-ligningen.