Matematisk modellering og numeriske metoder

Morten Grud Rasmussen

September 20, 2016

1 Lineære ODE'er af første orden

1.1 De grundlæggende definitioner

Definition 1.1. *Lineære ODE'er af første orden* er ODE'er, der er – eller vha. algebra kan bringes – på formen

$$y'(x) + p(x)y(x) = r(x). \tag{1}$$

En lineær ODE af første orden siges at være på standardform, hvis den allerede er på formen (1). I mange ingeniørsammenhænge kaldes funktionen r for *inputtet*, mens y kaldes for *outputtet* eller *responsen på inputtet*. Hvis $r \equiv 0$, kaldes ODE'en en *homogen* lineær førsteordens ODE.

Som altid starter vi med det simpleste. Antag altså, at vi har en homogen lineær ODE

$$y'(x) + p(x)y(x) = 0. \tag{2}$$

En hurtig omskrivning (separation af de variable) giver

$$\frac{1}{y(x)}y'(x) = -p(x) \tag{3}$$

som ved integration bliver til

$$\ln|y(x)| = -\int p(x)\,\mathrm{d}x + c.$$

Tager man nu eksponentialfunktionen på begge sider og ophæver numerisk-tegnene, får man

$$y(x) = \pm e^c e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x} = \tilde{c}e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}, \tag{4}$$

hvor $\tilde{c} = \pm e^c \neq 0$. Vi bemærker nu, at vi ved omskrivningen til (3) faktisk antog, at $y \neq 0$, da vi jo dividerer med $y(x)$. Et hurtigt tjek viser dog, at også $y \equiv 0$ er en løsning, så generelt er (4) altså en løsning for alle reelle værdier af $\tilde{c}$.

Det næste skridt er selvfølgelig at finde løsningen for en inhomogen lineær ODE. I første omgang konstaterer vi, at hvis vi sætter funktionen $h = \int p(x)\,\mathrm{d}x$, så opfylder F givet ved $F(x) = e^{h(x)}$ følgende:

$$F(x)y'(x) + F(x)p(x)y(x) = (F(x)y(x))' = 0.$$

Det må betyde, at $y' + py = r$ kan skrives

$$(Fy)' = Fr,$$

som integreres til

$$e^h y = Fy = \int F(x)r(x)\,\mathrm{d}x = \int e^{h(x)}r(x)\,\mathrm{d}x + c.$$

Vi kan nu dividere igennem med e^h og få den generelle løsningsformel

$$y = e^{-h}\Big(\int e^{h(x)}r(x)\,\mathrm{d}x + c\Big) \quad \text{hvor} \quad h = \int p(x)\,\mathrm{d}x. \tag{5}$$

(Vi bemærker, at integrationskonstanten i h ikke er af betydning: hvis vi erstatter h med $\tilde{h}$ som er givet ved $\tilde{h}(x) = h(x) + k$, så vil e^{-k} optræde som en konstant foran parentesen, men dette vil kompenseres af en tilsvarende faktor e^k indenfor integralet samt ved at foretage et andet valg af c.) Idet konstanten c er bestemt af eventuelle begyndelsesværdibetingelser, kan løsningsformlen tolkes i følgende ingeniørtermer:

$$y = e^{-h}\int e^{h(x)}r(x)\,\mathrm{d}x + e^{-h}c$$

læses som "outputtet er lig med responsen på inputtet r plus responsen på begyndelsesværdibetingelsen c".

Eksempel 1.2. Vi skal løse begyndelsesværdiproblemet

$$y'(x) + y(x)\tan(x) = \sin(2x) \quad \text{hvor} \quad y(0) = 1.$$

Vi begynder med at identificere funktionerne p, r og h:

$$p(x) = \tan(x), \quad r(x) = \sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x) \quad \text{og} \quad h(x) = \int_a^x \tan(x_1)\,\mathrm{d}x_1 = \ln(|\sec(x)|)$$

for et passende valg af a, hvor $\sec$ er sekantfunktionen, $\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$ (husk, at vi selv må vælge a jf. diskussionen ovenfor). Vi får altså

$$e^{h(x)} = |\sec(x)|, \quad e^{-h(x)} = |\cos(x)| \quad \text{og} \quad e^{h(x)}r(x) = |\sec(x)|2\sin(x)\cos(x) = 2\sin(x)\,\mathrm{sgn}(\cos(x))$$

hvor sgn er fortegnsfunktionen ("signum"), så den generelle løsning er

$$y(x) = |\cos(x)|\Big(2\int_b^x \sin(x_1)\,\mathrm{sgn}(\cos(x_1))\,\mathrm{d}x_1 + c\Big) = |\cos(x)|\Big(2\int_b^x \sin(x_1)\,\mathrm{sgn}(\cos(x_1))\,\mathrm{d}x_1 + c\Big),$$

som måske ser lidt uoverskuelig ud. Vi bemærker derfor, at begyndelsesværdiproblemet slet ikke giver mening i $\frac{\pi}{2} + n\pi$ for alle $n \in \mathbb{Z}$ ($\tan$ er ikke defineret her) samtidig med, at $\cos$ har konstant fortegn og $\sin$ integrerer til 0 henover intervallet mellem disse punkter. Dvs., at vi ved at sætte $\tilde{c} = \mathrm{sgn}(\cos(x))c$ kan skrive

$$\begin{aligned} y(x) &= \mathrm{sgn}(\cos(x))|\cos(x)|\Big(2\int_b^x \sin(x_1)\,\mathrm{d}x_1 + \tilde{c}\Big) \\ &= 2\cos(x)(-\cos(x) + \cos(b)) + \tilde{c}\cos(x) \\ &= -2\cos^2(x) + k\cos(x), \end{aligned}$$

hvor $k = \tilde{c} + 2\cos(b)$. Da begyndelsesværdibetingelsen er $y(0) = 1$, ser vi, at $y(0) = -2\cos^2(0) + k\cos(0) = -2 + k = 1$, så $k = 3$. Her kan $3\cos(x)$ tolkes som responsen til begyndelsesværdibetingelsen og $-2\cos^2(x)$ tolkes som responsen til inputtet $\sin(2x)$.

2 Eksistens og entydighed af løsninger

Der findes både begyndelsesværdiproblemer uden løsninger, med netop én løsning, og med to eller flere (ja, faktisk uendeligt mange) løsninger. Ofte er det rart at vide, om der findes en løsning (hvorfor ellers lede?), og om der er kun er én ("jeg har fundet en løsning, så det må være den rigtige!"). Til dette har vi følgende to sætninger:

Sætning 2.1. *Antag, at der findes et rektangel $R = [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b]$ så begyndelsesværdiproblemet*

$$y'(x) = f(x, y(x)), \qquad y(x_0) = y_0$$

opfylder følgende:

1. *f er kontinuert for alle $(x, y) \in R$*
2. *f er begrænset på R (dvs. der eksisterer et $K > 0$ så $|f(x, y)| \leq K$ for alle $(x, y) \in R$).*

Så findes der en løsning y defineret for alle x i intervallet $[x_0 - \min(a, \frac{b}{K}), x_0 + \min(a, \frac{b}{K})]$.

Sætning 2.2. *Antag, at der findes et rektangel $R = [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b]$ så begyndelsesværdiproblemet*

$$y'(x) = f(x, y(x)), \qquad y(x_0) = y_0$$

opfylder følgende:

1. *f og $\frac{\partial f}{\partial y}$ er kontinuerte for alle $(x, y) \in R$*
2. *f og $\frac{\partial f}{\partial y}$ er begrænsede på R (dvs. der eksisterer et $K > 0$ og et $M > 0$ så $|f(x, y)| \leq K$ og $|\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)| \leq M$ for alle $(x, y) \in R$).*

Så findes der netop én løsning y defineret for alle x i intervallet $[x_0 - \min(a, \frac{b}{K}), x_0 + \min(a, \frac{b}{K})]$.

3 Homogene lineære ODE'er af anden orden

3.1 Linearitet af løsninger/superpositionsprincippet

Homogene lineære ODE'er af første orden er ODE'er, der kunne bringes på standardformen

$$y'(x) + p(x)y(x) = 0,$$

og følgende definition burde derfor ikke komme som en overraskelse:

Definition 3.1 (Andenordens homogene lineære ODE'er)**.** En ODE som er – eller vha. algebra kan bringes – på formen

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0,$$

kaldes en *homogen lineær ODE af anden orden*.

En anden ting, der er værd at bide mærke i, er, at den generelle løsningsformel for en homogen linær ODE af første orden er

$$y = ce^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}$$

hvor c kan være et vilkårligt reelt tal. Vi minder om, at begrebet linearitet beskæftiger sig med forholdet mellem nogle størrelser (f.eks. v og u), som vi kalder vektorer, deres sum (f.eks. $u + v$), og deres skalering (f.eks. au) med en (typisk reel) skalar (her betegnet a). Lad nu c_1, c_2 og a være reelle tal og definér

$$y_1 = c_1 e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x} \quad \text{og} \quad y_2 = c_2 e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}.$$

Det er nu oplagt, at $y_1 + y_2 = (c_1 + c_2)e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}$ samt $ay_1 = (ac_1)e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}$ også er løsninger, idet $c_1 + c_2$ og ac_1 også er reelle tal. I matematiske termer siges *løsningsrummet for førsteordens homogene lineære ODE'er* at være *lukket under linearkombinationer* (eller at udgøre et vektorrum), altså summer og skaleringer af løsninger er også løsninger. I førsteordenstilfældet er det ikke noget, man gør så meget ud af, idet det koger ned til, at summer og produkter af reelle tal også er reelle tal, men det er alligevel instruktivt at bemærke, at dette faktum dog også let kan ses af ODE'en:

$$(ay)' + p(ay) = ay' + apy = a(y' + py) = a \cdot 0 = 0 = 0 + 0 = (y_1' + py_1) + (y_2' + py_2) = (y_1 + y_2)' + p(y_1 + y_2),$$

som altså ikke blot er otte måder at skrive nul på, men også et bevis for, at løsningsrummet for homogene lineære ODE'er af første orden er lukket under linearkombinationer, som ikke hænger på den generelle løsningsformel, men følger direkte af definitionen. Hvorfor al den snak? Sagen er naturligvis, at det samme gælder for homogene lineære ODE'er af anden orden, med næsten verbatim det samme bevis:

$$(ay)'' + p(ay)' + q(ay) = ay'' + apy' + aqy = a(y'' + py' + qy) = a \cdot 0 = 0$$

og

$$(y_1 + y_2)'' + p(y_1 + y_2)' + q(y_1 + y_2) = y_1'' + y_2'' + py_1' + py_2' + qy_1 + qy_2 = (y_1'' + py_1' + qy) + (y_2'' + py_2' + qy_2) = 0 + 0,$$

hvor evalueringen af sidste sum er overladt til læseren pga. den begrænsede sidebredde. Vi opsummerer:

Sætning 3.2 (superpositionsprincippet)**.** *Hvis to løsninger til en andenordens homogen lineær ODE er defineret på samme interval, så vil også skaleringer af disse samt deres sum være løsninger på dette fælles interval.*

I førsteordenstilfældet kunne denne sætning reduceres til et udsagn om reelle tal, men dette *linearitetsprincip* (løsningsrummet for første-/andenordens homogene lineære ODE'er er lukket under linearkombinationer) spiller en mere prominent rolle i andenordenstilfældet. Dette skyldes følgende tommelfingerregel: *løsningsrummet for n'te-ordens ODE'er er typisk n-dimensionelt* (et n-dimensionelt vektorrum), et udsagn som løbende vil blive uddybet og præciseret i løbet af kurset. Vi tager først et eksempel:

Eksempel 3.3. Vi betragter den homogene, lineære ODE af anden orden

$$y'' + y = 0.$$

Det er oplagt, at både $\cos$ og $\sin$ løser denne ODE (differentiér selv to gange og sæt ind). Jævnfør Sætning 3.2 er således også alle funktioner f på formen

$$f(x) = a\cos(x) + b\sin(x)$$

løsninger, for alle valg af reelle konstanter a og b. Vi skal senere se, at alle løsninger nødvendigvis er på denne form. Da $\cos$ og $\sin$ ikke kan skrives som skaleringer af hinanden, siger man, at $\cos$ og $\sin$ er *lineært uafhængige*, og da alle løsninger kan skrives som en *linearkombination* af disse to lineært uafhængige funktioner, siger man, at de udgør en *basis* for *løsningsrummet*, som dermed er af *dimension* 2.

3.2 Grundlæggende lineær algebra

Vi vil nu mere formelt definere begreberne linearkombination, uafhængighed, dimension og basis.

Definition 3.4 (Linearkombination, uafhængighed, dimension og basis)**.** Lad M være en mængde vektorer (dvs. matematiske størrelser, som kan adderes og skaleres). En *linearkombination* er da en endelig sum af skalerede elementer fra M, dvs. noget, der kan skrives på formen:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i v_i = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_{n-1} v_{n-1} + a_n v_n$$

hvor n er et naturligt tal, $\{a_i\}_{i=1}^n$ er skalarer ((typisk reelle) tal) og $v_i \in M$ for $i = 1, \ldots, n$.

Vektorerne i M kaldes *uafhængige*, hvis

$$\sum_{v \in M} a_v v = 0$$

medfører, at $a_v = 0$ for alle $v \in M$. Med andre ord: den eneste linearkombination af vektorer i M, som giver nul, er den trivielle linearkombination, hvor alle skalarer er 0.

Dimensionen af et vektorrum[1] er lig det højeste antal lineært uafhængige vektorer, der kan findes i vektorrummet.

En mængde vektorer $B \subset V$ siges at være en *basis* for vektorrummet V, såfremt vektorerne i B er uafhængige og antallet af vektorer i B er lig med dimensionen af V.

Det er værd at understrege, at alle vektorer i et vektorrum V med basis B kan skrives (entydigt) som en linearkombination af basiselementerne i B, men vi springer beviset over. I relation til Eksempel 3.3 betyder dette, at for at bevise at alle løsninger kan skrives på den angivne form, $a\cos + b\sin$, er det nok at vide at $\sin$ og $\cos$ er uafhængige løsninger, samt at dimensionen af løsningsrummet er 2. Sidstnævnte oplysning følger af en eksistens- og entydighedssætning, som vi vil behandle næste gang, samt en betragtning omkring begyndelsesværdiproblemer, som vi straks vil fokusere på:

[1]Vi minder om, at et vektorrum V er en mængde, hvor $av \in V$ og $v + u \in V$, hvis a er en skalar og $u, v \in V$.

3.3 Begyndelses- og randværdiproblemer for andenordens homogene lineære ODE'er

Det viser sig, at den rette definition af et begyndelsesværdiproblem i andenordenstilfældet er bygget på følgende

Definition 3.5 (Begyndelsesværdibetingelse for andenordens-ODE'er)**.** En begyndelsesværdibetingelse for ODE'er af anden orden består af to krav på formen

$$y(x_0) = K_0 \quad \text{og} \quad y'(x_0) = K_1.$$

Eksempel 3.6 (Bogens Example 4 på side 49)**.** Vi har set, at linearkombinationer af $\cos$ og $\sin$ løser $y'' + y = 0$. Et begyndelsesværdiproblem for denne ODE er givet ved begyndelsesværdibetingelsen

$$y(0) = 3 \qquad \text{og} \qquad y'(0) = -\frac{1}{2}$$

Da $\binom{\cos(0)}{\cos'(0)} = \binom{1}{0}$ og $\binom{\sin(0)}{\sin'(0)} = \binom{0}{1}$ er lineært uafhængige, kan vi (entydigt) finde a og b så

$$a\begin{pmatrix}\cos(0)\\ \cos'(0)\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}\sin(0)\\ \sin'(0)\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\ -\frac{1}{2}\end{pmatrix},$$

og det kræver ikke fuld ædruelighed at se, at løsningen er $a = 3$ og $b = -\frac{1}{2}$. Vores begyndelsesværdiproblem har derfor løsningen

$$y(x) = 3\cos(x) - \frac{1}{2}\sin(x).$$

I stedet for at angive værdien af løsningen (og dens afledede) til et begyndelsestidspunkt, kan man sommetider være interesseret i et problem, hvor man kender værdien af løsningen i randen af definitionsområdet for løsningen (som jo er et interval). Dette giver følgende:

Definition 3.7 (Randværdisbetingelse for andenordens-ODE'er)**.** En randværdibetingelse for ODE'er af anden orden består af to krav på formen

$$y(x_0) = K_0 \quad \text{og} \quad y(x_1) = K_1.$$

Hvis $K_0 = K_1 = 0$, kaldes randbetingelsen *homogen*.

3.4 Reduktion af orden

Vi vil nu gennemgå en metode til givet én kendt løsning at finde en anden løsning til en homogen lineær ODE af anden orden, som er kendt under navnet *reduktion af orden*. Vi starter med at anvende metoden i et konkret tilfælde og destillerer derefter den generelle metode.

Eksempel 3.8. Vi skal finde to lineært uafhængige løsninger[2] til ODE'en

$$(x^2 - x)y''(x) - xy'(x) + y(x) = 0. \tag{6}$$

[2] I bogen står der *basis*, men da vi ikke har grundlag for at sige, at det er en basis, før vi har diskuteret eksistens og entydighed i næste lektion, så holder vi os til dét, vi ved, nemlig at vi skal finde to lineært uafhængige løsninger.

Når koefficientfunktionerne er polynomier, er det ofte en god idé at prøve at se, om vi kan finde en løsning, som er et polynomium, og vi konstaterer, at $y_1(x) = x$ rent faktisk er en løsning. Vi mangler derfor blot at finde én anden, uafhængig løsning, sagt med andre ord, en løsning y_2 hvorom det gælder, at $ay_1 + by_2 \equiv 0$ medfører, at $a = b = 0$. Hvis vi derfor antager, at den anden løsning y_2 kan skrives på formen $y_2(x) = y_1(x)u(x)$, så kan u ikke være en konstant funktion. Vi vil nu prøve at bestemme et sådant u. Sæt $y(x) = u(x)y_1(x) = u(x)x$ og udregn:

$$y'(x) = u'(x)x + u(x) \qquad \text{og} \qquad y''(x) = u''(x)x + 2u'(x).$$

Sætter vi dette y ind i ODE'en, får vi:

$$0 = (x^2 - x)(u''(x)x + 2u'(x)) - x(u'(x)x + u(x)) + u(x)x = (x^2 - x)(u''(x)x + 2u'(x)) - u'(x)x^2.$$

Vi forkorter nu med x:

$$(x-1)(u''(x)x + 2u'(x)) - u'(x)x = (x^2 - x)u''(x) + (x-2)u'(x) = 0,$$

som ved at sætte $v = u'$ bliver til:

$$(x^2 - x)v'(x) + (x-2)v(x) = 0, \tag{7}$$

som altså er en ODE af første orden, deraf navnet *reduktion af orden*. Separation af de variable giver nu

$$\frac{1}{v(x)}v'(x) = -\frac{x-2}{x^2-x} = \frac{x}{x^2-x} - \frac{2(x-1)}{x^2-x} = \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x},$$

som ved integration giver

$$\ln|v(x)| = \ln|x-1| - 2\ln|x| = \ln\left|\frac{x-1}{x^2}\right| + k,$$

hvor vi kan vælge $k = 0$, da vi blot skal bruge én løsning. Dette medfører

$$|v(x)| = \left|\frac{x-1}{x^2}\right|,$$

så vi har de to (lineært afhængige) løsninger til (7)

$$v(x) = \pm\frac{x-1}{x^2} = \pm\frac{1}{x} \mp \frac{1}{x^2}.$$

Vi skal dog blot finde én løsning til (6), og det gør vi ved at vælge den ene af de to mulige løsninger til (7) ovenfor (f.eks. $v_1(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$) og bruge $v_1 = u'$ og $y_2(x) = u(x)x$:

$$u = \int v_1(x)\,\mathrm{d}x + c \quad \text{giver} \quad u(x) = \ln|x| + \frac{1}{x}$$

for passende valg af c, så

$$y_2(x) = x\ln|x| + 1$$

er den ønskede anden løsning.

Dette var reduktion af orden i et konkret tilfælde. Vi vil nu gennemgå den generelle metode. Tag derfor en homogen lineær ODE af anden orden på *standardform*

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0.$$

Antag, at y_1 er en løsning og sæt $y_2 = uy_1$, så

$$y_2' = u'y_1 + uy_1' \qquad \text{og} \qquad y_2'' = u''y_1 + u'y_1' + u'y_1 + uy_1' = u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1'',$$

som vi nu kan indsætte i ODE'en

$$u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1'' + p(u'y_1 + uy_1') + quy_1 = u''y_1 + u'(2y_1' + py_1) + u(y_1'' + py_1' + qy_1) = 0,$$

hvor vi ser, at da y_1 er en løsning, er sidste parentes 0. Dette betyder, at u kun indgår som første- og andenafledede:

$$u''y_1 + u'(2y_1' + py_1) = 0.$$

Vi dividerer nu med y_1 og sætter $v = u'$:

$$v' + \Big(\frac{2y_1'}{y_1} + p\Big)v = 0,$$

som er den ordensreducerede form. Igen separerer vi:

$$\frac{1}{v}v' = -\Big(\frac{2y_1'}{y_1} + p\Big)$$

som vi integrerer og tager eksponent af,

$$\ln|v| = -2\ln|y_1| - \int p(x)\,\mathrm{d}x, \qquad |v| = \frac{1}{y_1^2}e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}.$$

Vi vælger den positive løsning

$$v_1 = \frac{1}{y_1^2}e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x},$$

integrerer igen og ganger med y_1:

$$u = \int v_1(x)\,\mathrm{d}x, \qquad y_2 = y_1 u = y_1 \int v_1(x)\,\mathrm{d}x.$$

Vi bemærker, at da v_1 er positiv, så er $\int v(x)\,\mathrm{d}x$ voksende, og altså ikke konstant, så y_1 og y_2 er lineært uafhængige. Pr. konstruktion er y_2 en løsning.

4 Homogene lineære ODE'er med konstante koefficienter

4.1 Formulering af problemet

Indtil videre kan vi håndtere generelle homogene lineære ODE'er af anden orden, såfremt vi kan finde blot én løsning. Hvis vi snævrer os ind til homogene lineære ODE'er med konstante koefficienter, altså $p \equiv a$ og $q \equiv b$ eller

$$y'' + py' + qy = y'' + ay' + by = 0$$

hvor a og b er reelle konstanter, så viser det sig, at vi kan klare alt. Som bekendt er $x \mapsto ce^{-kx}$ en løsning til følgende førsteordens homogene lineære ODE:

$$y' + ky = 0.$$

Det kunne derfor være interessant at se, hvordan $y_0(x) = e^{\lambda x}$ klarer sig i det aktuelle setup. Vi forsøger at sætte ind:

$$y_0'' + ay_0' + by_0 = \lambda^2 y_0 + a\lambda y_0 + by_0 = (\lambda^2 + a\lambda + b)y_0 = 0 \tag{8}$$

hvilket oplagt kræver, at $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ (idet $y_0 \neq 0$). Vi skal med andre ord til at bruge, hvad vi ved om andengradspolynomier. Vi deler op i de tre tilfælde:

4.2 Positiv diskriminant: $a^2 - 4b > 0$ og dermed to rødder

Hvis $a^2 - 4b > 0$ (bemærk, at polynomierne ikke er på formen $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ men i stedet $1 \cdot \lambda^2 + a\lambda + b = 0$) har vi to reelle rødder $\lambda_\pm = \frac{-a \pm \sqrt{a^2-4b}}{2}$, og $x \mapsto e^{\lambda_\pm x}$ udgør derfor to lineært uafhængige løsninger, idet

$$c_1 e^{\lambda_+ x} + c_2 e^{\lambda_- x} = 0$$

betyder at

$$c_1 e^{(\lambda_+ - \lambda_-)x} = -c_2$$

hvilket tydeligvis kun kan lade sig gøre for $c_1 = c_2 = 0$ (vi behøver ikke tjekke efter, at de er løsninger, det følger jo af (8)).

4.3 Diskriminanten er 0: $a^2 - 4b = 0$ og dermed én dobbeltrod

Hvis $a^2 - 4b = 0$, så er $\lambda_0 = \frac{-a}{2}$ en dobbeltrod, og vi har kun én løsning. Frygt ej! Vi har jo en metode ved navn reduktion af orden til at finde en anden lineært uafhængig løsning. Anvender vi den metode på vores kendte løsning $x \mapsto e^{-\frac{ax}{2}}$, så får vi den anden løsning til at være

$$x \mapsto xe^{-\frac{ax}{2}}.$$

Tror man det ikke, har man følgende tre muligheder:

1. Sæt ind i ODE'en og se, at det er en løsning!

2. Benyt selv reduktion af orden-metoden med $x \mapsto e^{-\frac{ax}{2}}$ som input og få lidt træning i metoden gratis med i købet!

3. Tjek de slibrige detaljer i bogen. Denne mulighed er den kedelige.

4.4 Negativ diskriminant: $a^2 - 4b < 0$ og ingen reelle rødder

En negativ diskriminant svarer til, at løsningerne er komplekse. Der findes nogle formler kaldet Eulers formler, som fortæller os, at komplekse eksponentialfunktioner har noget med $\sin$ og $\cos$ at gøre. Kort fortalt giver de $\sin$ og $\cos$ som linearkombinationer af komplekse eksponentialfunktioner. Idet $a^2 - 4b < 0$, så er

$$\lambda_{\pm i} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2} = -\frac{a}{2} \pm i\omega$$

de to komplekse rødder, hvor $\omega^2 = b - \frac{1}{4}a^2$. Set i lyset af Eulers formler, skulle det derfor ikke komme bag på jer, at

$$y_1(x) = e^{-\frac{ax}{2}} \cos(\omega x) \qquad \text{og} \qquad y_2(x) = e^{-\frac{ax}{2}} \sin(\omega x)$$

er to lineært uafhængige løsninger. I har ikke haft tilstrækkeligt med kompleks funktionsteori til at få et ordentligt argument, men igen har I et par muligheder:

1. Tjek efter, at de to påståede løsninger rent faktisk *er* løsninger!
2. Lad som om I har styr på kompleks funktionsteori og anvend Eulers formler i blind vildskab. Har I brikkerne på plads og/eller heldet med jer, vil I nå frem til ovenstående resultat som værende blandt de mulige reelle, uafhængige løsninger.

4.5 Opsummering

Vi har påstået, at vi nu i tilfældet homogene lineære ODE'er af anden orden med konstante koefficienter kan klare alt. For nu må I nøjes med at tro på, at det er tilstrækkeligt at kende to uafhængige løsninger og herudover benytte Sætning 3.2 til at danne vilkårlige linearkombinationer. Næste gang vil I se, at det er tilstrækkeligt. Vi behandler nu de tre scenarier, hvor vi tolker dem som forskellige typer løsninger til et dæmpet masse-fjeder-system.

5 Oscillationer i et masse-fjeder-system

5.1 Det udæmpede system

En fjeder, som er spændt fast i loftet og har en kugle hængede for enden, kan modelleres med formlen

$$my'' + ky = 0,$$

hvor $m > 0$ er massen af kuglen og $k > 0$ er fjederkonstanten fra Hooke's lov. Den generelle løsning er selvfølgelig på formen

$$y(t) = A\cos\Big(\sqrt{\tfrac{k}{m}}t\Big) + B\sin\Big(\sqrt{\tfrac{k}{m}}t\Big) = C\cos\Big(\sqrt{\tfrac{k}{m}}t - \delta\Big), \qquad C = \sqrt{A^2 + B^2}, \quad \tan(\delta) = \frac{B}{A},$$

jævnfør løsningsformlen for andenordens homogene lineære ODE'er og en anvendelse af additionsformlerne for trigonometriske funktioner, altså et oscillerende system.

5.2 Det samme – men med dæmpning

Vi modellerer nu en dæmpning ved $-cy'$, $c > 0$ og får ODE'en

$$my'' + cy' + ky = 0.$$

Vi ser, at vi skal løse andengradspolynomiet

$$\lambda^2 + \frac{c}{m}\lambda + \frac{k}{m} = 0$$

og får rødderne $\lambda_1 = -\frac{c}{2m} + \frac{\sqrt{c^2-4mk}}{2m}$ og $\lambda_1 = -\frac{c}{2m} - \frac{\sqrt{c^2-4mk}}{2m}$, som begge nødvendigvis er ikke-positive, idet $c^2 - 4mk < c^2$. Diskriminantens fortegn afgør nu resultatet:

- $c^2 > 4mk$: Den generelle løsning har formen $y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$, og er altså en sum af to eksponentielt aftagende funktioner. Ingen oscillation!
- $c^2 = 4mk$: Den generelle løsning har formen $y(t) = (c_1 + c_2 t)e^{\lambda_1 t}$, og er altså en sum af en eksponentielt aftagende funktion og en skalering af samme funktion ganget t. Den kan være heldig at krydse nulpunktet en enkelt gang, men ingen oscillation!
- $c^2 < 4mk$: Den generelle løsning har formen $y(t) = Ce^{-\frac{ct}{2m}} \cos\left(\frac{\sqrt{4mk-c^2}}{2m}t - \delta\right)$ og er altså en eksponentielt aftagende, men oscillerende løsning!