Matematisk modellering og numeriske metoder

Morten Grud Rasmussen

17. september 2016

1 Euler-Cauchy-ligninger

1.1 De tre typer af Euler-Cauchy-ligninger

Efter at have beskæftiget os med homogene lineære ODE'er af anden orden med konstante koefficienter, går vi i gang med en bestemt type homogene lineære ODE'er af anden orden med variable koefficienter, nemlig de såkaldte *Euler-Cauchy-ligninger*, som er ODE'er af typen

$$x^2 y''(x) + axy'(x) + by(x) = 0,$$

hvor a og b er konstanter. Som før i lignende situationer prøver vi først ad med en simpel funktion, som ligner koefficienterne, nemlig $f(x) = x^m$:

$$\begin{aligned} x^2 f''(x) + axf'(x) + bf(x) &= x^2 m(m-1)x^{m-2} + axmx^{m-1} + bx^m \\ &= x^m(m(m-1) + am + b) \\ &= x^m(m^2 + (a-1)m + b), \end{aligned}$$

som i hvert fald er 0, hvis andengradspolynomiet i m, $m^2 + (a-1)m + b$, er 0. Som i tilfældet med konstante koefficienter skal vi altså betragte tre tilfælde, nemlig to reelle, én reel dobbelt- og to komplekse rødder. Determinanten er $d = (a-1)^2 - 4b$, så det svarer til:

Positiv diskriminant: $(a-1)^2 - 4b > 0$ og to reelle rødder

De to rødder er givet ved $m_\pm = \frac{1-a}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}(a-1)^2 - b}$, og to lineært uafhængige løsninger er derfor

$$y_+(x) = x^{m_+} \qquad \text{og} \qquad y_-(x) = x^{m_-}.$$

Alle andre løsninger findes således ved linearkombinationer af disse to.

Diskriminanten er 0: $(a-1)^2 - 4b = 0$ og én dobbeltrod

Dobbeltroden er givet ved $m_0 = \frac{1-a}{2}$ som svarer til løsningen

$$y_0(x) = x^{\frac{1-a}{2}},$$

og en anden løsning kan nu findes vha. metoden reduktion af orden. Først skal ODE'en bringes på standardform (ellers dur formlen ikke):

$$y''(x) + \frac{a}{x}y'(x) + \frac{b}{x^2}y(x) = y''(x) + \frac{a}{x}y'(x) + \frac{(a-1)^2}{4x^2}y(x) = 0,$$

hvor $b = \frac{(a-1)^2}{4}$, da determinanten var antaget lig nul. Følger man nu metoden slavisk (og regner rigtigt), kommer man frem til, at $u(x) = \ln|x|$ (afhængig af konstantvalg undervejs kan det være, at man i stedet har fået $\tilde{u} = c_1 u + c_2$, men det er ligegyldigt, sålænge $c_1 \neq 0$). Reduktion af orden giver således den af y_0 lineært uafhængige løsning

$$y_r(x) = \ln|x| x^{\frac{1-a}{2}},$$

og alle andre løsninger kan findes som linearkombinationer af y_0 og y_r.

Negativ diskriminant: $(a-1)^2 - 4b < 0$ og to komplekse rødder

Her er rødderne $m_{\pm i} = \frac{1-a}{2} \pm i\sqrt{b - \frac{1}{4}(a-1)^2}$, og skal vi finde en løsning, skal vi således igen til at lege med Eulers formler og være lidt på matematisk tynd is (vi har ikke de rigtige argumenter). Fifler man tilstrækkeligt længe, når man frem til, at

$$y_{\cos}(x) = x^{\frac{1-a}{2}} \cos\Big(\sqrt{b - \tfrac{1}{4}(a-1)^2}\ln(x)\Big) \qquad \text{og} \qquad y_{\sin}(x) = x^{\frac{1-a}{2}} \sin\Big(\sqrt{b - \tfrac{1}{4}(a-1)^2}\ln(x)\Big)$$

er to lineært uafhængige løsninger. Det er dog ikke tilfældigt, hvis I ikke har set $\sin \circ \ln$ eller $\cos \circ \ln$ før: problemer med disse løsninger optræder sjældent i praksis.

2 Eksistens og entydighed samt konsekvenser heraf

2.1 Eksistens og entydighed for homogene lineære ODE'er af anden orden

Vi har set, at der var eksistens og entydighed af løsninger under visse betingelser for ODE'er af første orden. Noget tilsvarende gør sig gældende i tilfældet homogene lineære differentialligninger af anden orden:

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0. \tag{1}$$

Som i førsteordenstilfældet er eksistens- og entydighedssætningerne bundet op på et begyndelsesværdiproblem, dvs. vi skal have fat i en begyndelsesværdibetingelse som i andenordenstilfældet ser ud som følger:

$$y(x_0) = K_0 \qquad \text{og} \qquad y_0'(x_0) = K_1 \tag{2}$$

Vi kan nu formulere sætningen:

Sætning 2.1. *Hvis koefficientfunktionerne p og q er kontinuerte på det åbne interval I og $x_0 \in I$, så eksisterer der netop én løsning til begyndelsesværdiproblemet givet ved* (1) *og* (2)*.*

Beviset er udenfor dette kursus' afgrænsning. Det er konsekvenserne af sætningen dog ingenlunde, og vi vil om lidt se indtil flere meget vigtige konsekvenser af denne sætning, inkl. sidste lektions påstand om, at når vi havde fundet to lineært uafhængige løsninger, så kan vi finde resten ved linearkombinationer.

Vi vil nu vise følgende proposition:

Proposition 2.2. *To løsninger y_1 og y_2 til ODE'en* (1) *defineret på samme interval I er lineært uafhængige hvis og kun hvis*

$$\begin{pmatrix} y_1(x_0) \\ y_1'(x_0) \end{pmatrix} \qquad \text{og} \qquad \begin{pmatrix} y_2(x_0) \\ y_2'(x_0) \end{pmatrix}$$

er lineært uafhængige for alle $x_0 \in I$.

Bevis. Bemærk, at $y_0 \equiv 0$ er en løsning for alle homogene, lineære ODE'er og linært afhængig af alle andre løsninger. Antag nu, at y_1 og y_2 er to linært uafhængige løsninger til IVP'et givet ved (1) og (2), hvor p og q er kontinuerte. Vælg et punkt $x_0 \in I$. Vi viser først, at vi ikke kan have $y_1(x_0) = y_2(x_0) = 0$:

Påstand 1: $y_1(x_0)$ *og* $y_2(x_0)$ *kan ikke samtidigt være* 0. Hvis $y_1(x_0) = 0$, så er $y_1'(x_0) \neq 0$ da vi pr. entydighed ellers havde, at $y_1 = y_0$, som ikke kan være lineært uafhængig af andre løsninger. Det samme gælder for y_2. Vi har altså, at hvis $y_1(x_0) = y_2(x_0) = 0$, så er $y_1'(x_0) \neq 0$ og $y_2'(x_0) \neq 0$. Sæt nu $a = \frac{y_2'(x_0)}{y_1'(x_0)}$. Så er

$$ay_1(x_0) = y_2(x_0) \qquad \text{og} \qquad ay_1'(x_0) = \frac{y_2'(x_0)}{y_1'(x_0)} y_1'(x_0) = y_2'(x_0),$$

og ay_1 og y_2 er pr. entydighed identiske. Dette er i modstrid med antagelserne om uafhængighed. Altså må der være noget i vejen med antagelsen om, at $y_1(x_0) = y_2(x_0) = 0$. ◇

Vi kan konkludere, at mindst ét af tallene $y_1(x_0)$ og $y_2(x_0)$ er forskelligt fra 0. Om $y_1(x_0) \neq 0$ eller $y_2(x_0) \neq 0$ er ligegyldigt, så vi antager, at $y_1(x_0) \neq 0$ og bytter blot rundt på y_1 og y_2, hvis det ikke er tilfældet. Vi vil nu vise følgende:

Påstand 2: *Hvis $y_1(x_0) \neq 0$, så er $ay_1(x_0) = y_2(x_0)$ og $ay_1'(x_0) \neq y_2'(x_0)$ for $a = \frac{y_2(x_0)}{y_1(x_0)}$.* Vi ser først at

$$ay_1(x_0) = \frac{y_2(x_0)}{y_1(x_0)} y_1(x_0) = y_2(x_0),$$

men hvis vi så har, at $ay_1'(x_0) = y_2'(x_0)$, så vil ay_1 og y_2 være samme løsning jf. entydigheden. Dette er i modstrid med antagelsen om uafhængighed. ◇

Antag nu, at der findes to tal c_1 og c_2, ikke begge lig 0, så

$$c_1 \begin{pmatrix} y_1(x_0) \\ y_1'(x_0) \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} y_2(x_0) \\ y_2'(x_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Specielt er

$$c_1 y_1(x_0) = -c_2 y_2(x_0). \tag{4}$$

Påstand 1 betyder som sagt, at vi kan antage, at $y_1(x_0) \neq 0$. Men så giver Påstand 2 os at

$$ac_1 y_1(x_0) = c_1 y_2(x_0) = -ac_2 y_2(x_0),$$

så enten er $y_2(x_0) = 0$, eller også er $a \neq 0$ og $ac_2 = c_1$. Antag først, at $y_2(x_0) = 0$. Så giver Påstand 1 og (4), at $c_1 = 0 = a$ og samtidig, at $y_2'(x_0) \neq ay_1'(x_0) = 0$, så (3) kan ikke være opfyldt, med mindre også $c_2 = 0$, i modstrid med antagelsen.

Vi mangler nu kun tilfældet $y_2(x_0) \neq 0$ hvor altså $a \neq 0$ og $-ac_2 = c_1$, hvilket kort kan skrives $a = -\frac{c_1}{c_2} \neq 0$ (grundet antagelsen om, at ikke både c_1 og c_2 er 0 giver $-ac_2 = c_1$ og $a \neq 0$ først, at de begge må være forskellige fra 0, og vi kan herefter dividere med c_2). I dette tilfælde kan (3) reduceres til

$$a \begin{pmatrix} y_1(x_0) \\ y_1'(x_0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_2(x_0) \\ y_2'(x_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

hvilket er i modstrid med Påstand 2. Det var den første halvdel af sætningen, nemlig, at lineær uafhængighed af løsningerne medfører lineær uafhængighed af

$$\begin{pmatrix} y_1(x_0) \\ y_1'(x_0) \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{pmatrix} y_2(x_0) \\ y_2'(x_0) \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Anden halvdel af sætningen, nemlig at afhængighed af løsningerne medfører afhængighed af (5) for alle $x_0 \in I$, er heldigvis lettere. Antag nu, at y_1 og y_2 er to lineært afhængige løsninger og at c_1 og c_2 er de to tal, ikke begge 0, så $c_1 y_1 + c_2 y_2 \equiv 0$. Så er også $c_1 y_1' + c_2 y_2' \equiv 0$. Evaluerer vi nu disse to funktionsudtryk i et punkt x_0, så følger det, at også $c_1 \binom{y_1(x_0)}{y_1'(x_0)} + c_2 \binom{y_2(x_0)}{y_2'(x_0)} = \binom{0}{0}$. □

Da linær uafhængighed af to vektorer i $\mathbb{R}^2$ reducerer til at determinanten af matricen, der har de to vektorer som søjler, er forskellig fra 0, får vi følgende korollar til Proposition 2.2:

Korollar 2.3 (Wronski-determinant)**.** *To løsninger y_1 og y_2 til ODE'en $y'' + py' + qy = 0$, hvor p og q er kontinuerte på et åbent interval I, er lineært uafhængige såfremt deres såkaldte* Wronski-determinant

$$W(y_1, y_2) = \det \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} = y_1 y_2' - y_2 y_1'$$

er forskellig fra 0 i ét (og dermed alle) $x_0 \in I$. Omvendt er $W(y_1, y_2) \equiv 0$ for afhængige y_1 og y_2.

Bemærk, at $W(y_1, y_2)$ er en *funktion*: $W(y_1, y_2)(x) = y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x)$. Vi er dog så heldige, at enten er den identisk 0, eller også er den aldrig 0.

Bevis. Det er stort set bare en omformulering af Proposition 2.2 jf. bemærkningen over korollaret. Vi knytter dog lige en kommentar til dét med, at hvis Wronski-determinanten er forskellig fra 0 i ét punkt x_0, så er den det overalt. Vi konstaterer, at hvis $W(y_1, y_2)(x_0) \neq 0$, så kan vi ikke have, at $c_1 y_1 + c_2 y_2 \equiv 0$ med mindre at $c_1 = c_2 = 0$, fordi vi ellers også ville have, at $c_1 y_1' + c_2 y_2' \equiv 0$ og dermed ville vi specielt have at $c_1 \binom{y_1(x_0)}{y_1'(x_0)} + c_2 \binom{y_2(x_0)}{y_2'(x_0)} = \binom{0}{0}$. Og hvis dette er tilfældet, så er også $W(y_1, y_2)(x_0) = 0$. □

Vi er slet ikke færdige med at drage konklusioner af Proposition 2.2 og Sætning 2.1:

Korollar 2.4 (Fundamentalløsning/fuldstændig løsning for homogene ODE'er af anden orden)**.** *Hvis p og q er kontinuerte på det åbne interval I, så har ODE'en $y'' + py' + qy = 0$ to lineært uafhængige løsninger y_1 og y_2 defineret på I. Hvis y_1 og y_2 er lineært uafhængige løsninger på I, så kan alle andre løsninger kan skrives på formen*

$$y = c_1y_1 + c_2y_2.$$

Ydermere er alle y på ovenstående form en løsning.

Bevis. Vi begynder nedefra med at konstatere, at vi allerede sidste gang så, at løsningsrummet er lukket under linearkombinationer, hvilket medfører sidste linje i korollaret.

At vi kan finde to lineært uafhængige løsninger, følger af entydighedssætningen, hvor vi vælger et x_0 og begyndelsesbetingelserne $y_1(x_0) = 1$ og $y_1'(x_0) = 0$ samt $y_2(x_0) = 0$ og $y_2'(x_0) = 1$, som giver Wronski-determinanten $W(y_1, y_2)(x_0) = 1 \neq 0$.

Lad y_1 og y_2 være tilfældige, lineært uafhængige løsninger og y en vilkårlig løsning, vi gerne vil skrive på formen $y = c_1y_1 + c_2y_2$. Vi skal blot løse følgende lineære ligningssystem i variablene c_1 og c_2

$$\begin{pmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(x_0) \\ y'(x_0) \end{pmatrix}$$

som har en entydig løsning da matricens determinant er Wronski-determinanten i x_0 og dermed forskellig fra 0 jf. Korollar 2.3, og matricen er dermed invertibel. Sætter vi nu $\tilde{y} = c_1y_1 + c_2y_2$ har vi, at $\tilde{y}$ er en løsning, $\tilde{y}(x_0) = y(x_0)$ og $\tilde{y}'(x_0) = y'(x_0)$, så pr. entydighed er $\tilde{y} = y$ som ønsket. □

Næstsidste korollar:

Korollar 2.5. *Andenordens homogene lineære ODE'er med kontinuerte koefficientfunktioner har todimensionelle løsningsrum.*

3 Ikke-homogene linære ODE'er af anden orden

3.1 Generelle og partikulære løsninger

Genkalder vi os beviset for, at summer og skaleringer af løsninger til homogene linære ODE'er igen er løsninger, så mindes vi, at det hele koges ned til, at højresiden er 0: $0 + 0 = 0$ og $a \cdot 0 = 0$. Vi ødelægger nu *alt* (næsten da) i dét argument ved at betragte ikke-homogene lineære ODE'er af anden orden:

$$y'' + py' + qy = r \tag{6}$$

hvor p, q og r er (normalt kontinuerte) funktioner, og $r \not\equiv 0$. Det parentesiske "næsten da" er selvfølgelig ikke så parentesisk, når det kommer til stykket, idet regnestykker som $0 + r = r$ og $a \cdot 0 + r = r$ giver anledning til begreberne *partikulære* og *generelle* løsninger:

Definition 3.1 (Partikulær løsning)**.** En konkret løsning y_p på et interval I til ODE'en (6) kaldes en *partikulær* løsning. Hvis ydermere y_1 og y_2 er lineært uafhængige løsninger på I til den tilhørende *homogene* lineære ODE af anden orden ((1) på side 2), så kaldes

$$y_g = y_p + c_1y_1 + c_2y_2$$

en *generel* løsning.

Lad L betegne den *lineære operator*[1] givet ved

$$L(y)(x) = y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x).$$

Så kan (6) og (1) skrives hhv.

$$L(y) = r \quad \text{og} \quad L(y) = 0.$$

Med denne notation på plads viser vi hurtigt følgende:

Sætning 3.2 (Generelle og partikulære løsninger for lineære ODE'er af anden orden)**.** *En generel løsning er en løsning til* (6)*, og differensen mellem to partikulære løsninger til* (6) *er en løsning til* (1)*.*

Bevis. Lad $y_g = y_p + c_1y_1 + c_2y_2$ være en generel løsning. Så er

$$L(y_g) = L(y_p) + c_1L(y_1) + c_2L(y_2) = r + c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 = r,$$

og y_g løser altså (6). Omvendt, lad y_p og $\tilde{y}_p$ være to forskellige løsninger til (6). Så er

$$L(y_p - \tilde{y}_p) = L(y_p) - L(\tilde{y}_p) = r - r = 0$$

og $y_p - \tilde{y}_p$ løser altså (1). □

Sidste korollar i følgen af korollarer, der fulgte Proposition 2.2 på side 3 er:

Korollar 3.3 (Generelle løsninger for lineære ODE'er af anden orden)**.** *Lad p, q og r være kontinuerte og y_p, y_1 og y_2 være som i Definition 3.1. Da kan enhver løsning skrives som en generel løsning*

$$y_g = y_p + c_1y_1 + c_2y_2$$

for passende valg af c_1 og c_2.

Bevis. Lad $\tilde{y}_p$ være en løsning, som vi vil skrive på formen $\tilde{y}_p = y_g = y_p + c_1y_1 + c_2y_2$. Da er

$$\tilde{y}_p = y_p + (\tilde{y}_p - y_p) = y_p + c_1y_1 + c_2y_2$$

idet $\tilde{y}_p - y_p$ er en løsning til den homogene ODE jf. Sætning 3.2, som kan skrives på formen $c_1y_1 + c_2y_2$ jf. Korollar 2.4. □

3.2 Stabilitet af løsninger for ODE'er med konstante koefficienter

Sidste gang så vi på løsninger af *homogene* lineære ODE'er af anden orden med *konstante koefficienter* og viste, at det at finde løsninger svarede til at finde rødder i det tilhørende karakteristiske polynomium. Vi bemærkede også, at disse løsninger konvergerede mod 0 for $x \to \infty$ hvis og kun hvis rødderne var negative eller havde negativ realdel. Dette betyder i det ikke-homogene tilfælde, at y_g konvergerer mod y_p for $x \to \infty$, hvis og kun hvis rødderne i det karakteristiske polynomium er negative eller har negativ realdel. Er det tilfældet, kaldes ODE'en *stabil*, mens den i det modsatte fald kaldes *ustabil*.

[1] L er en funktion, der sender en to gange differentiabel funktion y over i $x \mapsto y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x)$.

3.3 De ubestemte koefficienters metode

Vi vil nu se på en relativt nem og hurtig – men ikke nødvendigvis skudsikker – metode til at finde løsninger til andenordens ikke-homogene lineære ODE'er *med konstante koefficienter*, dvs. ODE'er på formen

$$y'' + ay' + by = r, \tag{7}$$

hvor a og b er konstanter og r er en kontinuert funktion. Vi har så småt diskuteret den i specialtilfælde, men vil nu gøre det mere systematisk. Det handler om at gætte kvalificeret på en løsning. For at være konkret kommer her en tabel samt en opskrift på at bruge den.

Led i $r(x)$	Valg af led i $y_p(x)$
$ke^{\gamma x}$	$Ce^{\gamma x}$
kx^n ($n \in \mathbb{N}$)	$K_n x^n + K_{n-1}x^{n-1} + \cdots + K_1 x^1 + K_0$
$k\sin(\omega x)$, $k\cos(\omega x)$	$K\cos(\omega x) + M\sin(\omega x)$
$ke^{\alpha x}\cos(\omega x)$, $ke^{\alpha x}\sin(\omega x)$	$e^{\alpha x}(K\cos(\omega x) + M\sin(\omega x))$

Metoden går ud på at gøre følgende: Hvis r kan skrives som en sum af funktioner fra venstre side i ovenstående tabel, så vælges y_p som summen af de tilsvarende udtryk på højresiden i tabellen. Kald funktionerne i y_p-summen f_i, så $y_p = \sum_{i=1}^n f_i$. Hvis vi nu definerer en lineær operator L ved $Ly = y'' + ay' + by$, så kan (7) skrives som

$$L(y) = r$$

Hvis $L(f_i) = 0$, så erstat f_i med funktionen $\tilde{f}_i \colon x \mapsto xf_i(x)$. Er også $L(\tilde{f}_i) = 0$ (f_i svarer til en dobbeltrod), så erstat med $x \mapsto x^2 f_i(x)$. Når $L(f_i) \neq 0$ (eller $L(\tilde{f}_i) \neq 0$ osv.) for alle $i = 1, \ldots, n$, så bestemmes koefficienterne i f_i'erne (C, K, M og $K_1, \ldots, K_n$), så $L(\sum_{i=1}^n f_i) = r$ (igen evt. med nogle f_i'er erstattet med $x \mapsto xf_i(x)$ eller $x \mapsto x^2 f_i(x)$). Se Eksempelsamlingen for eksempler.