Matematisk modellering og numeriske metoder

Morten Grud Rasmussen

27. september 2016

1 En generel løsningsformel for andenordens ikke-homogene lineære ODE'er med kontinuerte koefficienter og input

1.1 De arbitrære parametres variationsmetode

Vi vil nu se på en generel løsningsformel for ikke-homogene lineære ODE'er af anden orden med kontinuerte koefficienter og kontinuert input, dvs.

$$y'' + py' + qy = r, \tag{1}$$

hvor p, q og r er kontinuerte på et åbent interval I, hvor vi ønsker at finde en løsning.

Advarsel: Denne metode kan resultere i svære integraler! Såfremt en anden metode kan anvendes (eksempelvis de ubestemte koefficienters metode), vil denne ofte være nemmere i praksis! Metodens styrke er naturligvis, at den (i hvert fald teoretisk) virker i alle situationer og dermed udgør et konstruktivt bevis for, at sådanne ODE'er altid har én løsning, og dermed et todimensionelt løsningsrum.

Vi begynder med at betragte den homogene pendant til (1) på standardform, altså ODE'en

$$y'' + py' + qy = 0,$$

og kalder to uafhængige løsninger til denne for y_1 og y_2 (husk, at vi fra tidligere har en generel løsningsformel i tilfældet, hvor p og q er konstante, eller hvor ODE'en er en Euler-Cauchy-ligning, altså $p(x) = \frac{a}{x}$, $q(x) = \frac{b}{x^2}$, hvor vi husker, at Euler-Cauchy-ligningen først skal bringes på standardform).

Fra tidligere ved vi, at $W = y_1y_2' - y_2y_1' \neq 0$ overalt. Hermed er følgende veldefineret:

$$y_p = -y_1 \int \frac{y_2(x)r(x)}{W(x)}\,\mathrm{d}x + y_2 \int \frac{y_1(x)r(x)}{W(x)}\,\mathrm{d}x, \tag{2}$$

og ydermere viser det sig, at y_p defineret på denne måde er en løsning til (1)! Nu kommer et par kommentarer.

Som I ser, så svarer de to integraler lidt til funktionen u i metoden reduktion af orden, idet der også dér var tale om, at man tog en løsning og gangede med en variabel funktion. Havde ovenstående ubestemte integraler således været konstante (lad os kalde disse konstanter hhv. $-c_1$ og c_2), så ville $y_p = c_1 y_1 + c_2 y_2$ og altså løse det homogene system. Vi ser nu, at vi ved at "variere parametrene" har fundet en løsning til det *ikke*-homogene problem.

Kommentar nr. to har sikkert større interesse for jer, idet den handler om en praktisk faldgruppe. Som det fremgår af (2), så indgår er et par x'er i formuleringen af løsningen. Det er dog *uhyre vigtigt* at holde sig for øje, at disse variable er såkaldt *dummy-variable*, idet de ingen betydning har uden for deres respektive integraler, og dermed kan omdøbes efter forgodtbefindende! De har *intet* med den frie variabel at gøre! Vi kan således omskrive (2) til

$$y_p(x) = -y_1(x) \int_a^x \frac{y_2(t)r(t)}{W(t)} \, \mathrm{d}t + y_2(x) \int_b^x \frac{y_1(s)r(s)}{W(s)} \, \mathrm{d}s,$$

hvor a og b bestemmer integrationskonstanterne. Indtil man har styr på metoden, er det faktisk anbefalelsesværdigt at gøre dette, så man ikke forveksler de mange variable.

At løsningsformlen er rigtig, kan verificeres ved inspektion. Udregn blot

$$y_p'' + p y_p' + q y_p$$

og konstatér, at udtrykket er lig r. Advarsel: Tungen skal holdes lige i munden! Jeg vil anbefale, at I tror på formlen som den står, men dog altid tjekker jeres resultater efter ved inspektion. På den måde får I tjekket, om I har regnet rigtigt og et sådant tjek gør det strengt taget også ud for et bevis i jeres konkrete tilfælde!

2 Systemer af ODE'er

2.1 Et eksempel på et "naturligt" system af ODE'er

Antag, at vi har to tanke, T_1 og T_2, som hver indeholder 100 volumenenheder vand. I tank T_1 er vandet rent til tid 0, mens 150 masseenheder gødning er opløst i T_2. De to tanke er under konstant omrøring, så vi kan antage, at deres indhold er uniformt. To rør forbinder tankene, og gennem dem cirkulerer 2 volumenenheder pr. tidsenhed hhv. den ene og den anden vej. Vi skal nu finde ud af, hvor hurtigt der er mindst halvt så meget gødning i T_1 som i T_2.

Lad derfor y_1 betegne mængden af gødning i T_1 til en given tid, mens y_2 betegner mængden af gødning i T_2. Først konstaterer vi, at der er tale om differentialligninger: vi kender ændringen pr. tid, ikke værdien pr. tid. Den øjeblikkelige ændring er jo forskellen på, hvor meget der flyder ind og hvor meget, der flyder ud. Altså:

$$\begin{aligned} y_1' &= \frac{2}{100} y_2 - \frac{2}{100} y_1 \quad \text{og} \\ y_2' &= \frac{2}{100} y_1 - \frac{2}{100} y_2, \end{aligned}$$

idet $\frac{2\,[\text{volumenenheder pr. tidsenhed}]}{100\,[\text{volumenenheder}]} = \frac{1}{50}$ [pr. tidsenhed] er andelen, der flyder fra den ene tank til den anden pr. tidsenhed, mens y_1 og y_2 som sagt er mængden i de enkelte tanke, hvilket betyder at produktet $\frac{1}{50} y_1$ [mængdeenhed pr. tidsenhed] eksempelvis er mængden, som flyder fra T_1 til T_2 pr. tidsenhed. Skriver vi nu $y = \left(\begin{smallmatrix} y_1 \\ y_2 \end{smallmatrix}\right)$, så er systemet altså beskrevet ved

$$y' = Ay \qquad \text{hvor} \qquad A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{50} & \frac{1}{50} \\ \frac{1}{50} & -\frac{1}{50} \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Hvis nu A i stedet var en diagonalmatrix,

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

så ville de to systemer ikke forstyrre hinanden, og vi ville i realiteten blot have

$$\begin{aligned} y_1' &= \lambda_1 y_1 \\ y_2' &= \lambda_2 y_2, \end{aligned}$$

som har løsningerne $y_1(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}$ og $y_2(t) = c_2 e^{\lambda_2 t}$. Bemærk dog, at λ_1 og λ_2 i dette tilfælde er *egenværdierne* for A, og at *egenvektorerne* for a er $v_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ og $v_2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, så løsningen har formen $x_1(t) = v_1 e^{\lambda_1 t}$ og $x_2(t) = v_2 e^{\lambda_2 t}$. Vi gætter derfor på, at det generelt gælder, at $x_i(t) = v_i e^{\lambda_i t}$, hvor v_i er egenvektor for A med tilhørende egenværdi λ_i, er en løsning til $y' = Ay$. Vi tjekker efter:

$$x_i'(t) = (v_i e^{\lambda_i t})' = \lambda_i v_i e^{\lambda_i t} = A v_i e^{\lambda_i t} = A x_i(t),$$

hvoraf det kan ses, at det faktisk er tilfældet. For matricen A i (3) finder vi egenværdier og egenvektorer til at være $\lambda_1 = 0$ og $v_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ samt $\lambda_2 = -\frac{1}{25}$ og $v_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$. Den generelle løsning til (3) er derfor

$$y(t) = c_1 v_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 v_2 e^{\lambda_2 t} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-\frac{1}{25} t}.$$

Hvis vi til tiden $t = 0$ har $y(0) = \left(\begin{smallmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 150 \end{smallmatrix}\right) = c_1 \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) + c_2 \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$, så må $c_1 = 75$ og $c_2 = -75$. Løsningen på vores IVP er altså

$$\begin{aligned} y_1(t) &= 75 - 75 e^{-\frac{1}{25} t} \\ y_2(t) &= 75 + 75 e^{-\frac{1}{25} t}. \end{aligned}$$

Vi skulle finde t_0, så $y_1(t_0) = \frac{1}{2} y_2(t_0)$. Da $y_1 + y_2 \equiv 150$ (der fordamper ikke gødning!) så betyder det, at $y_1(t_0) = 50$ og dermed at $t_0 = \frac{\log(3)}{\frac{1}{25}} = 25 \log(3) \simeq 27.5$, og vi skal altså lade blandingen foregå i ca. 30 tidsenheder.

2.2 Konvertering af en ODE af n'te orden til et system af n ODE'er

I afsnittet før så vi på et "naturligt" system af ODE'er. Hvad er så et "unaturligt" (som vel må eksistere qua den ovenforbenyttede distinktion)? Tja, man kan vel diskutere, hvor unaturligt, det er, men idéen er, at man tager en almindelig ODE af n'te orden og laver den om til et system, hvor man ikke nødvendigvis kan tolke de enkelte ODE'er som andet end sådan noget som "hastigheden" og "accelerationen." Metoden fremgår af nedenstående sætning, som på det nærmeste er indelysende.

Sætning 2.1. *Antag, at vi har en ODE af n'te orden på formen*

$$y^{(n)}(t) = F(t, y(t), y'(t), \ldots, y^{(n-1)}(t)). \tag{4}$$

Dette system er da ækvivalent med følgende system af n ODE'er:

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= y_3 \\ &\cdots \\ y_{n-1}' &= y_n \\ y_n' &= F(t, y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{aligned} \tag{5}$$

via identifikationen

$$y_1 = y, \quad y_2 = y', \quad y_3 = y'', \quad \cdots \quad y_n = y^{(n-1)}.$$

For illustration omskriver vi nu masse-fjeder-systemet til et system af ODE'er af første orden. Først skal vi bringe problemet på samme form som (4):

$$my'' + cy' + ky = 0 \qquad \text{omskrives altså til} \qquad y'' = -\frac{c}{m}y' - \frac{k}{m}y.$$

Hermed er masse-fjeder-systemet beskrevet på formen (4) såfremt vi sætter $F(t, y, z) = -\frac{c}{m}z - \frac{k}{m}y$. Vi kan nu sætte $y_1 = y$ og $y_2 = y'$ og skrive masse-fjeder-systemet på formen (5):

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= F(t, y_1, y_2) = -\frac{c}{m}y_2 - \frac{k}{m}y_1. \end{aligned}$$

Matricen for systemet er således

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{pmatrix}$$

og systemet kan nu løses ved at finde egenværdier og egenvektorer for A og benytte metoderne fra foregående afsnit.