Matematisk modellering og numeriske metoder

Morten Grud Rasmussen

4. oktober 2016

1 Laplace-transformationer

1.1 Definitionen af Laplace-transformationen

Definition 1.1 (Laplace-transformation)**.** Lad f være en funktion defineret på de ikke-negative reelle tal. Hvis integralet

$$F(s) = \mathcal{L}(f)(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t \tag{1}$$

eksisterer, så kaldes $\mathcal{L}(f)$ *Laplace-transformationen* af f. Den *lineære operator* $\mathcal{L}$ som afbilder en funktion ind i sin Laplace-transformation kaldes også for Laplace-transformationen.

Bemærkning 1.2. Notationen $\int_0^\infty f(t)\,\mathrm{d}t = I$ betyder at størrelsen $\int_0^M f(t)\,\mathrm{d}t = I(M)$ eksisterer for alle $M > 0$ og at grænsen $\lim_{M\to\infty} I(M)$ eksisterer og er ligmed I.

Laplace-transformationen af en funktion navngivet med et lille bogstav (eksempelvis f) skrives ofte som samme bogstav i stor udgave (eksempelvis F). I det følgende vil vi reservere bogstavet t til den uafhængige variabel af den originale funktion, mens s bruges som den uafhængige variabel af Laplace-transformationen.

Hvis $F(s) = \mathcal{L}(f)(s)$ for alle værdier af s, skriver vi også

$$f = \mathcal{L}^{-1}(F).$$

Der findes forskellige funktioner $f \neq g$ som opfylder, at $\mathcal{L}(f) = \mathcal{L}(g)$, så strengt taget er $\mathcal{L}^{-1}(F)$ ikke entydigt defineret. Heldigvis har dette problem ikke de store praktiske konsekvenser og kan helt undgås, hvis man eksempelvis holder sig til kontinuerte funktioner; hvis $f \neq g$ og f og g begge er kontinuerte, så vil også $\mathcal{L}(f) \neq \mathcal{L}(g)$.

Eksempel 1.3. Lad $f(t) = 1$ for $t \geq 0$. Vi vil finde $\mathcal{L}(f)$. Pr. definition,

$$\mathcal{L}(f)(s) = \mathcal{L}(1)(s) = \int_0^\infty e^{-st}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_{t=0}^{\infty} = \frac{1}{s},$$

for $s \neq 0$.

Eksempel 1.4. Lad $f(t) = e^{at}$ for $t \geq 0$ og en konstant a. Vil vil finde $\mathcal{L}(f)$. Vi bruger igen definitionen:

$$\mathcal{L}(e^{at})(s) = \int_0^\infty e^{-st}e^{at}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{s-a}e^{-(s-a)t}\Big|_{t=0}^{\infty} = \frac{1}{s-a},$$

når $s - a > 0$.

1.2 Linearitet af Laplace-transformationen

Som allerede nævnt er Laplace-transformationen $\mathcal{L}$ en *lineær operator*. Og hvad betyder så det? Jo:

Definition 1.5 (Lineær operator)**.** En *lineær operator* L er en afbildning fra et vektorrum X til et andet vektorrum Y som opfylder $L(ax + by) = aL(x) + bL(y)$ for alle vektorer $x, y \in X$ og alle skalarer[1] a, b.

Denne egenskab kan bruges til nemmere at udregne Laplace-transformationen af en funktion. Vi ikke har præciseret hvilke funktionsrum, $\mathcal{L}$ er defineret fra og til, men det kan vises, at de rent faktisk begge er vektorrum. Vi vil nu vise påstanden:

Sætning 1.6 (Laplace-transformationen er en lineær operator)**.** *Laplace-transformationen er en lineær operator.*

Bevis. Lad a og b være reelle tal, og antag at f og g ligger i domænet for $\mathcal{L}$, dvs. $\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,\mathrm{d}t$ og $\int_0^\infty e^{-st}g(t)\,\mathrm{d}t$ eksisterer. Dette betyder at

$$I_f(M) = \int_0^M e^{-st}f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{og} \quad I_g(M) = \int_0^M e^{-st}g(t)\,\mathrm{d}t$$

eksisterer for alle M og har de endelige grænseværdier

$$\lim_{M\to\infty} I_f(M) = I_f = \int_0^\infty e^{-st}f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{og} \lim_{M\to\infty} I_g(M) = I_g = \int_0^\infty e^{-st}g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Da integration er lineær, så må

$$\int_0^M e^{-st}(af(t) + bg(t))\,\mathrm{d}t = a\int_0^M e^{-st}f(t)\,\mathrm{d}t + b\int_0^M e^{-st}g(t)\,\mathrm{d}t = aI_f(M) + bI_g(M) \tag{2}$$

hvor højresiden oplagt konvergerer mod $aI_f + bI_g$. Da (2) gælder for alle M, så må venstresiden have samme grænseværdi og vi konkluderer at

$$\mathcal{L}(af + bg) = a\mathcal{L}(f) + b\mathcal{L}(g)$$

for alle a, b, f og g. □

Eksempel 1.7. Vi vil finde Laplace-transformationen af $f\colon t \mapsto \cosh(at)$. Da

$$\cosh(at) = \frac{1}{2}(e^{at} + e^{-at}),$$

[1] et andet ord for tal, som ofte bruges i forbindelse med vektorer

kan vi udnytte lineariteten og Eksampel 1.4 til at få

$$\mathcal{L}(f)(s) = \frac{1}{2}(\mathcal{L}(e^{a\,\cdot}) + \mathcal{L}(e^{-a\,\cdot}))(s) = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s+a}\Big) = \frac{s}{s^2-a^2},$$

hvor $e^{a\,\cdot}$ betegner funktionen $t \mapsto e^{at}$.

Laplace-transformationen af $t \mapsto \sinh(at)$ kan udregnes tilsvarende, mens de ikke-hyperbolske udgaver, $\sin$ og $\cos$, med jeres nuværende viden kræver et trick for at blive udregnet, omend man kan blive fristet til at snyde og bruge de såkaldte Euler-repræsentationer $\cos(at) = \frac{1}{2}(e^{iat}+e^{-iat})$ og $\sin(at) = \frac{1}{2i}(e^{iat} - e^{-iat})$ (hvis man ignorerer at eksponenten er kompleks og bare bruger metoden ovenfor algebraisk, så vil man komme til det rigtige resultat – vi vil dog bevæge os på usikker grund, da vi ikke har set, hvordan man håndterer komplekse integraler).

1.3 Laplace-transformationen af polynomier

Pr. linearitet kan ovenstående sektionsoverskrift reduceres til "Laplace-transformationen af simple monomier," hvor et monomium er en funktion f på formen $f\colon t \mapsto t^n$ for et naturligt tal n. Vi udleder i stedet det mere generelle resultat at for alle reelle tal a og $f\colon t \mapsto t^a$ er

$$\mathcal{L}(f)(s) = \frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}.$$

Da $\int_0^\infty e^{-x}x^n\,\mathrm{d}x = \Gamma(n+1) = n!$, svarer denne formel til den anden formel, når $a = n$ er et naturligt tal. Vi snyder dog en smule ved at undlade at vise, at $\Gamma(n+1) = n!$ rent faktisk er tilfældet. Udledningen går som følger.

$$\mathcal{L}(f)(s) = \int_0^\infty e^{-st}t^a\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty e^{-x}\Big(\frac{x}{s}\Big)^a\frac{\mathrm{d}x}{s} = \frac{1}{s^{a+1}}\int_0^\infty e^{-x}x^a\,\mathrm{d}x = \frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$$

hvor vi undervejs substituerede $st = x$ og brugte definitionen af $\Gamma(a+1)$.

1.4 At udskifte s med $s - a$ i transformationen

Handlingen beskrevet i denne sektions overskrift kaldes også *s-shifting* eller *s-forskydning* og klares ved at udnytte følgende simple trick.

Sætning 1.8. *Hvis f's Laplace-tranformation er $s \mapsto F(s)$ for $s > k$, hvor k er et tilpas stort tal, så er $t \mapsto e^{at}f(t)$'s Laplace-transformation $s \mapsto F(s-a)$ for $s - a > k$, kort skrevet:*

$$\mathcal{L}(e^{a\,\cdot} f)(s) = F(s-a)$$

Bevis. Lad k være så stor at $F(s)$ eksisterer for $s > k$. Så eksisterer $F(s-a)$ for $s - a > k$ og

$$F(s-a) = \int_0^\infty e^{-(s-a)t}f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty e^{-st}e^{at}f(t)\,\mathrm{d}t = \mathcal{L}(e^{a\,\cdot} f)$$

som påstået. □

1.5 Eksistens og entydighed

Sætning 1.9. *Lad f være integrabel på ethvert endeligt interval på den positive halvakse og have højst eksponentiel vækst:*

$$|f(t)| \leq Me^{kt}$$

for passende konstanter M og k. Så eksisterer Laplace-transformationen $s \mapsto \mathcal{L}(f)(s)$ for alle $s > k$.

Vi bemærker, at en tilstrækkelig betingelse for at være integrabel på ethvert endeligt interval er at være stykkevist kontinuert.

Bevis. Antag at $s > k$. Så er

$$\frac{M}{s-k} = \int_0^\infty Me^{kt}e^{-st}\,\mathrm{d}t \geq \int_0^\infty |f(t)|e^{-st} \geq \left| \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t \right| = |\mathcal{L}(f)(s)|.$$

Da første tal er endeligt, er det sidste også. □

Dette var eksistens. Hvad med entydighed? Vi har allerede berørt emnet; to forskellige funktioner f og g kan give anledning til samme Laplace-transformerede, hvis man ikke nøjes med at kigge på eksempelvis kontinuerte f og g. Det er dog muligt at give præcis matematisk betydning af udsagnet: "hvis $\mathcal{L}(f) = \mathcal{L}(g)$, så er f og g *essentielt* ens."

2 Laplace-transformationen og ODE'er

Okay, hvad er pointen med disse Laplace-transformationer? Jo, det viser sig, at Laplace-transformationen gør det muligt at transformere et IVP om til et algebraisk problem, hvis løsning kan transformeres tilbage til en løsning af IVP'et. En grundlæggende ingrediens er det følgende.

2.1 Laplace-transformationer af afledte

Sætning 2.1 (Laplace-transformationen af den n'te afledte af en funktion)**.** *Antag at den k'te afledte $t \mapsto f^{(k)}(t)$ af en funktion f er kontinuert for alle $t \geq 0$ og har højst eksponentiel vækst for alle $k \leq n-1$. Antag at $f^{(n)}$ er stykkevist kontinuert på ethvert endeligt interval på den positive halvakse. Så er*

$$\mathcal{L}(f^{(n)})(s) = s^n\mathcal{L}(f)(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$$

for alle tilstrækkeligt store s. Specielt gælder for henholdsvis $n = 1$ og $n = 2$, at

$$\mathcal{L}(f')(s) = s\mathcal{L}(f)(s) - f(0)$$

og

$$\mathcal{L}(f'')(s) = s^2\mathcal{L}(f)(s) - sf(0) - f'(0).$$

Bevis. Vi begynder med tilfældet $n = 1$. Antag først, at f' er kontinuert (og ikke blot stykkevist kontinuert). Ved at bruge definitionen og partiel integration fås

$$\mathcal{L}(f')(s) = \int_0^\infty e^{-st} f'(t)\,\mathrm{d}t = [e^{-st}f(t)]\Big|_{t=0}^{\infty} + s\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Antagelserne giver nu, at $t \mapsto e^{-st} f(t)$ "evalueret i" ∞ (strengt taget er der tale om at finde en grænseværdi) er 0, når s er tilstrækkeligt stor ($s > k$, hvor k er k'et fra vækstbetingelsen), mens $e^{-s\cdot 0} f(0) = f(0)$ og det sidste integral er $s\mathcal{L}(f)(s)$. Dette giver

$$\mathcal{L}(f')(s) = s\mathcal{L}(f)(s) - f(0). \tag{3}$$

Hvis f' kun er stykkevist kontinuert, kan de samme argumenter bruges på hver af de kontinuerte dele, og pr. linearitet er konklusionen den samme.

Det generelle resultat følger nu af at bruge (3) på $f^{(n)}$ iterativt:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(f^{(n)})(s) &= s\mathcal{L}(f^{(n-1)})(s) - f^{(n-1)}(0) \\
&= s^2\mathcal{L}(f^{(n-2)})(s) - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0) \\
&\dots \\
&= s^n\mathcal{L}(f)(s) - s^{n-1}f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)
\end{aligned}$$

hvilket afslutter beviset. □

Eksempel 2.2. Tidligere talte vi om at snyde med udregningen af Laplace-transformationen af $t \mapsto \cos(at)$. Nu gør vi det ordentligt. Lad $f(t) = \cos(at)$. Så er $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$ og $f''(t) = -a^2 f(t)$. Pr. linearitet og Sætning 2.1 får vi nu to forskellige måder at udtrykke $\mathcal{L}(f'')$ ved hjælp af $\mathcal{L}(f)$:

$$\mathcal{L}(f'')(s) = -a^2\mathcal{L}(f)(s) = s^2\mathcal{L}(f)(s) - s\,.$$

Hvis vi nu isolerer $\mathcal{L}(f)(s)$ i den sidste lighed, fås

$$\mathcal{L}(f)(s) = \frac{s}{s^2 + a^2}.$$

et tilsvarende argument giver Laplace-transformationen af $t \mapsto \sin(at)$. (Vink: betragt $\mathcal{L}(f')$.)

2.2 Laplace-transformationen af integralet af en funktion

Sætning 2.3 (Laplace-transformationen af et integral)**.** *Lad F betegne Laplace-transformationen af en stykkevist kontinuert funktion f med højst eksponentiel vækst (vi kalder faktoren i eksponenten for k). Så har vi for $s > \max(0, k)$ og $t > 0$*

$$\mathcal{L}\Big(\int_0^{\cdot} f(t)\,\mathrm{d}t\Big)(s) = \frac{1}{s}F(s),$$

hvor $\int_0^{\cdot} f(t)\,\mathrm{d}t$ er funktionen $\tau \mapsto \int_0^{\tau} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Bevis. Vi begynder med at konstatere at

$$\Big|\int_0^{\tau} f(t)\,\mathrm{d}t\Big| \le \int_0^{\tau} |f(t)|\,\mathrm{d}t \le M\int_0^{\tau} e^{kt}\,\mathrm{d}t = \frac{M}{k}(e^{k\tau} - 1) \le \frac{M}{k}e^{k\tau}$$

så $\tau \mapsto \int_0^{\tau} f(t)\,\mathrm{d}t$ har højst eksponentiel vækst. Desuden er $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\int_0^{\tau} f(t)\,\mathrm{d}t = f(\tau)$ stykkevist kontinuert og $\int_0^0 f(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Vi kan nu benytte Sætning 2.1 på f og få

$$\mathcal{L}(f)(s) = s\mathcal{L}\Big(\int_0^{\cdot} f(t)\,\mathrm{d}t\Big)(s).$$

Resultatet fås nu ved at dividere begge sider med s. □

2.3 Laplace-transformationen som et værktøj til at løse IVP'er

Betragt andenordens IVP'et

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = r(t), \quad y(0) = K_0, \quad y'(0) = K_1,$$

(bemærk at andenordens IVP'er også kræver $y'(x_0) = z_0$ og ikke blot "$y(x_0) = y_0$" for at være fuldt determineret.) Her er a, b, K_0 og K_1 konstanter, og funktionen r kaldes *inputtet* eller *den drivende kraft* og y kaldes *outputtet* eller *responsen til den drivende kraft*.

Idéen er nu at tage Laplace-transformationen på begge sider af ligningen:

$$\mathcal{L}(y'' + ay' + by)(s) = \mathcal{L}(r)(t)$$

hvilket vi ser kan skrives som

$$(s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)) + a(sY(s) - y(0)) + bY(s) = (s^2 + as + b)Y(s) - (s + a)y(0) - y'(0) = R(s)$$

hvor $Y = \mathcal{L}(y)$ og $R = \mathcal{L}(r)$. Ved at isolere $Y(s)$ fås

$$Y(s) = \frac{(s + a)y(0) + y'(0) + R(s)}{s^2 + as + b} = \big((s + a)y(0) + y'(0)\big)Q(s) + R(s)Q(s), \tag{4}$$

hvor $Q(s) = \frac{1}{s^2+as+b} = \frac{1}{(s+\frac{1}{2}a)^2+b-\frac{1}{4}a^2}$ kaldes *transferfunktionen*. Bemærk at Q *hverken afhænger af* $r(t)$ *eller af begyndelsesværdibetingelserne* men kun af a og b.

Da løsningen y er differentiabel, er den også kontinuert, og den inverse Laplace-transformation af Laplace-transformationen af y er derfor entydigt bestemt. Dette betyder, at vi blot kan tage den inverse Laplace-transformation af den algebraiske løsning af Laplace-transformationen af ODE'en (4) for at finde en løsning til ODE'en. Dette gøres normalt ved at omskrive højresiden af (4) som en sum af led hvis inverse Laplace-transformation kan findes i tabeller er ved at bruge et computerprogram.

Eksempel 2.4. Vi vil nu løse andenordens IVP'et

$$y''(t) - y(t) = t, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$$

Vi bemærker at $Q(s) = \frac{1}{s^2-1}$ og da $r(t) = t$, er $\mathcal{L}(r) = \frac{1}{s^2}$, så (4) bliver

$$Y(s) = \big((s + 0) \cdot 1 + 1\big)\frac{1}{s^2 - 1} + \frac{1}{s^2}\frac{1}{s^2 - 1} = \frac{1}{s - 1} + \Big(\frac{1}{s^2 - 1} - \frac{1}{s^2}\Big).$$

Vi er nu klar til at sætte det hele sammen for at finde løsningen til det oprindelige problem.

Vi genkender første led som en "s-forskudt" $\frac{1}{s}$ (forskudt med 1). Da $\frac{1}{s}$ er Laplace-transformationen af den konstante funktion 1, og da s-forskydninger fås ved at gange med funktionen $t \mapsto e^{at}$, hvor a er størrelsen af skiftet, konkluderer vi at $\mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{\cdot-1})(t) = e^t$. Det næste led, $\frac{1}{s^2-1}$ er Laplace-transformationen af $t \mapsto \sinh(t)$. Derfor er $\mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{\cdot^2-1})(t) = \sinh(t)$. Det sidste led er Laplace-transformationen af t.

Alt i alt,

$$y(t) = e^t + \sinh(t) - t,$$

og vi bemærker at denne løsning blev fundet uden først at finde en generel løsning.

3 Tabel over Laplace-transformationen af udvalgte funktioner

$f(t)$	1	t	t^2	t^n $n=0,1,2,\ldots$	t^a $a\geq 0$	e^{at}
$\mathcal{L}(f)(s)$	$\frac{1}{s}$	$\frac{1}{s^2}$	$\frac{2!}{s^3}$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$	$\frac{1}{s-a}$

$f(t)$	$\cos(\omega t)$	$\sin(\omega t)$	$\cosh(at)$	$\sinh(at)$	$e^{at}\cos(\omega t)$	$e^{at}\sin(\omega t)$
$\mathcal{L}(f)(s)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\frac{s}{s^2-a^2}$	$\frac{a}{s^2-a^2}$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$	$\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$