Matematisk modellering og numeriske metoder

Morten Grud Rasmussen

27. september 2016

1 Forcerede oscillationer

1.1 Et forstyrret masse-fjeder-system

I udledningen af masse-fjeder-systemets ODE antog vi, at der ikke var nogen "ydre kræfter." Hvis nu fjederen ikke er spændt fast i et solidt loft, men der i stedet står en eller anden lurendrejer og bevæger den normalt fastspændte del af fjederen op og ned i en jævn bevægelse, så kommer der en ydre kraft med i modellen, et *input*, som vi tidligere har benævnt det, og vores ODE ophører med at være homogen. I stedet får vi den ikke-homogene ODE

$$my'' + cy' + ky = r,$$

hvor r er inputtet. Da systemet uden input er et oscillerende system, er det naturligt at fokusere på følgende specielle valg af r:

$$my''(t) + cy'(t) + ky(t) = F_0 \cos(\omega t), \tag{1}$$

hvor F_0 og ω – ligesom m og k – er positive reelle tal (mens c i udgangspunktet blot er ikke-negativ).

Man kan ved hjælp af de ubestemte koefficienters metode vise, at y_p givet ved

$$y_p(t) = a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$$

er en partikulær løsning, såfremt

$$a = F_0 \frac{m(\omega_0^2 - \omega^2)}{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 c^2} \qquad \text{og} \qquad b = F_0 \frac{\omega c}{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 c^2}, \tag{2}$$

hvor $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Vi ved, at enhver løsning dermed kan skrives på formen

$$y = y_p + y_h,$$

hvor y_h er en løsning til den homogene ODE

$$my'' + cy' + ky = 0.$$

Som sagt er kravet på c blot, at den er ikke-negativ – $c = 0$ svarer som bekendt til et udæmpet system, mens $c > 0$ svarer til et dæmpet. Vi vil nu se på de to tilfælde hver for sig.

1.2 Udæmpede, forcerede oscillationer samt resonans

Hvis $c = 0$, så fremgår det af (2), at vi skal til at overveje tingene lidt nøjere, såfremt $\omega_0 = \omega$. Antag derfor i første omgang, at $\omega_0 \neq \omega$. Da vil (2) reducere til

$$a = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} = \frac{F_0}{k\big(1 - (\frac{\omega}{\omega_0})^2\big)} \qquad \text{og} \qquad b = 0,$$

hvor vi kommer fra den ene repræsentation af a til den anden ved at bruge, at $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Hermed er

$$y_p(t) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos(\omega t),$$

og husker vi den homogene løsning fra tidligere, så får vi den generelle løsning til at være:

$$y(t) = y_p(t) + y_h(t) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos(\omega t) + C\cos(\omega_0 t - \delta),$$

altså *en sum af to harmoniske oscillationer med forskellig frekvens!* Nok så vigtigt, så ser vi, at amplituden i første oscillation (dén fra y_p) er $\frac{F_0}{m(\omega_0^2-\omega^2)}$, som altså vokser ubegrænset, når ω nærmer sig ω_0. Tager man amplituden af inputtet F_0, fjederkonstanten k og massen m ud af billedet, så ender man med tallet

$$\rho = \frac{k}{F_0}\frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} = \frac{1}{1 - (\frac{\omega}{\omega_0})^2},$$

som kaldes *resonansfaktoren*. Hvis vi vælger $C = -\frac{F_0}{m(\omega_0^2-\omega^2)}$ og $\delta = 0$, så kan vi bruge de trigonometriske additionsformler til at vise, at

$$y(t) = y_p(t) + y_h(t) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \sin\big(\tfrac{\omega_0+\omega}{2}t\big)\sin\big(\tfrac{\omega_0-\omega}{2}t\big).$$

Hvis ω således nærmer sig ω_0, så bliver $\omega_0 - \omega$ lille, og sidste sinus-funktion bliver langsomtsvingende, mens $\omega_0 + \omega$ forbliver i størrelsesordenen $2\omega_0$. Det er det samme, som den interferens, man lytter efter, når man stemmer sin guitar (eller sit klaver, hvis man er til den slags).

Vi vil nu se på, hvad der sker, hvis $\omega = \omega_0$. Ud fra ovenstående kunne man få den tanke, at der ikke længere er en øvre grænse for løsningens udsving. Vi opskriver ODE'en:

$$y''(t) + \omega_0^2 y(t) = \frac{F_0}{m}\cos(\omega_0 t)).$$

Dette er en oplagt kandidat til de ubestemte koefficienters metode, men idet $\cos(\omega_0 t)$ og $\sin(\omega_0 t)$ begge løser den homogene ODE, så skal vi altså gange med t:

$$y_p(t) = t(a\cos(\omega_0 t) + b\sin(\omega_0 t)).$$

Regner vi på det, får vi, at $a = 0$ og $b = \frac{F_0}{2m\omega_0}$. En partikulær løsning er derfor

$$y_p(t) = \frac{F_0}{2m\omega_0} t\sin(\omega_0 t),$$

som tydeligvis oscillerer vildere og vildere pga. faktoren t. Dette kaldes *resonans*, et begreb, som er rigt illustreret på YouTube (søg eksempelvis på "resonance bridge" – derfor skal ingeniører lære matematik).

1.3 Dæmpede, forcerede oscillationer

Som vi husker fra tidligere, så har det karakteristiske polynomium for det homogene system negativ realdel, eller sagt på en anden måde, alle løsninger konvergerer mod 0, hvilket betyder, at ODE'en (1) er *stabil* i den forstand, vi indførte tidligere. Det betyder blot, at alle løsninger konvergerer mod den samme partikulære løsning, som altså kan skrives på formen

$$y_p(t) = C\cos(\omega t - \delta) = \frac{F_0}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 c^2}}\cos(\omega t - \delta),$$

hvor $\tan(\delta) = \frac{\omega c}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$. Det kan vises, at amplituden C antager sin maksimale værdi som funktion af ω, når $\omega^2 = \omega_0^2 - \frac{c^2}{2m^2}$, såfremt højresiden er ikke-negativ, hvilket er tilfældet, når $c^2 \leq 2mk$. Sætter vi dette valg af ω ind, så får vi følgende værdi af C:

$$C = \frac{2mF_0}{c\sqrt{4m^2\omega_0^2 - c^2}}, \qquad (\omega^2 = \omega_0^2 - \tfrac{c^2}{2m^2}).$$