Matematisk modellering og numeriske metoder

Lektion 9

Morten Grud Rasmussen

1. november 2016

1 Fourierrækker

1.1 Fourierrækker og periodeskift

Vi så allerede sidste gang, at hvis f har perioden p, så har f_a givet ved

$$f_a(x) = f(\tfrac{x}{a})$$

perioden ap. Dette kneb virker selvfølgelig også i forbindelse med Fourierrækker. Hvis vi eksempelvis er interesseret i en periode på $2L$, så kan Fouriersetuppet oversættes på følgende måde:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n \cos\Big(\frac{n\pi}{L}x\Big) + b_n \sin\Big(\frac{n\pi}{L}x\Big)\Big),$$

hvor

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\,\mathrm{d}x \\
a_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\Big(\frac{n\pi}{L}x\Big)\,\mathrm{d}x \\
b_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\Big(\frac{n\pi}{L}x\Big)\,\mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

for $n = 1, 2, 3, \ldots$. Der er flere detaljerede eksempler på brugen af dette i bogen på side 484–486.

1.2 Forenklinger for lige og ulige funktioner

Sidste gang bemærkede vi, at den ulige funktion f givet ved

$$f(x) = \begin{cases} -k & \text{for } -\pi < x < 0 \\ k & \text{for } 0 < x < \pi \end{cases}$$

havde en Fourierrække, som kun bestod af $\sin$-led. Vi bemærkede også, at f og alle $\sin$-ledene er ulige funktioner, mens a_0 og $\cos$-ledene er lige funktioner (bemærk i øvrigt, at a_0-ledet kan betragtes som et $\cos(nx)$-led med $n = 0$). Vi genkalder os, at en ulige funktion g er en funktion, som opfylder, at

$$g(-x) = -g(x)$$

mens en lige funktion h er en funktion, som opfylder, at

$$h(-x) = h(x).$$

Pointen er selvfølgelig, at en ulige funktion integrerer til 0 over $[-\pi, \pi]$, og at produkter af to ulige funktioner eller to lige funktioner er lige, mens produktet af en ulige og en lige funktion er en ulige funktion (ligesom med *summer* af lige og ulige tal). Derudover gælder, at hvis vi kender en 2π-periodisk funktion f på intervallet $[0, \pi]$, og vi ved at den er lige (eller ulige), så kender vi funktionen overalt. Pga. dette er det også tilstrækkeligt at integrere over den ene eller den anden halvdel af intervallet, når man finder Fourierkoefficienter af lige eller ulige funktioner. Mere præcist:

Sætning 1.1. *Lad f være en 2π-periodisk funktion, hvis Fourierrække konvergerer punktvis mod f. Hvis f er lige (dvs. $f(-x) = f(x)$), så reducerer Fourierrækken til*

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx),$$

hvor

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{and} \qquad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x \quad \text{for } n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Hvis f er ulige (dvs. $f(-x) = -f(x)$), så reducerer Fourierrækken til

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx),$$

hvor

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x.$$

Da alle funktioner f kan skrives som en sum af en ulige funktion f_u og en lige funktion f_l, så kan ovenstående sætning bruges i forbindelse med følgende sætning, hvis bevis nemt følger af linearitet af integraler.

Sætning 1.2. *Hvis vi skriver $a_0(f)$, $a_n(f)$ og $b_n(f)$ for Fourierkoefficienterne for en funktion f, så er* funktionalerne *a_0, a_n og b_n* lineære, *dvs.*

$$a_0(f_1+f_2) = a_0(f_1) + a_0(f_2), \quad a_n(f_1+f_2) = a_n(f_1) + a_n(f_2) \quad \text{og} \quad b_n(f_1+f_2) = b_n(f_1) + b_n(f_2),$$

og

$$a_0(cf) = ca_0(f), \qquad a_n(cf) = ca_n(f) \qquad \text{og} \qquad b_n(cf) = cb_n(f),$$

for alle valg af funktioner f_1, f_2 og f og alle reelle tal c. Sagt med ord: Fourierkoefficienterne af en sum $f_1 + f_2$ er en sum af Fourierkoefficienterne af f_1 and f_2, og Fourierkoefficienterne af cf er c gange Fourierkoefficienterne af f.

Ovenstående sætning er ikke bare brugbar i forbindelse med opsplitning i lige og ulige dele, men også i de situationer, hvor funktionen f, man ønsker at finde en Fourierrække for, naturligt skrives som en sum.

1.3 Halvsidige udviklinger

Den reducerede kompleksitet af lige og ulige Fourierrækker og deres forenklede udregning (man skal blot integrere over halvdelen af intervallet) giver inspiration til følgende idé. Forestil dig, at du har en funktion f, som naturligt er defineret på det endelige interval $[0, L]$, men at du gerne vil skrive f som en Fourierrække (som altså er en periodisk funktion). Første tanke er måske blot at udvide f til en L-periodisk funktion, hvilket også vil virke, specielt hvis man husker, at formlerne fra afsnit 1.1 er tilpasset $2L$-periodiske funktioner, ikke L-periodiske, og husker at tilpasse dem til L-periodiske i stedet. Hvis vi i bund og grund ikke er interesseret i periodiciteten af Fourierrækken for f, men mere Fourierrækken *i sig selv*, så kunne man *betragte* f som værende $2L$-periodisk og *lige* (eller ulige, hvis det passer bedre til formålet). I punktform kan vi altså gøre følgende:

1. Lad f betegne en funktion på $[0, L]$, som vi gerne vil have en Fourierrække for.

2. Lad f_l være en *lige*, $2L$*-periodisk udvidelse* af f og tilsvarende, lad f_u være en *ulige*, $2L$*-periodisk udvidelse* af f.

3. Vælg f_l eller f_u (afhængig af, hvad der passer dig bedst) og anvend Sætning 1.1 på denne funktion, efter passende tilpasninger af disse formler til det $2L$-periodiske setup vha. metoderne fra afsnit 1.1 (dvs. π'er skal være L'er, og n'er indeni de trigonometriske funktioner skal ganges med $\frac{\pi}{L}$.

4. Resultatet er en $2L$-periodisk funktion, som stemmer overens med f på $[0, L]$, så længe f er tilpas pæn (se Sætning 1.7 fra noterne til Lektion 8 for tilstrækkelige betingelser for at være tilpas pæn).

For at konkretisere antager vi nu, at f_u er det bedste valg i et givet tilfælde. Så er Fourierkoefficienterne for f_u $a_0(f_u) = a_n(f_u) = 0$ for $n = 1, 2, 3, \ldots$ og

$$b_n(f_u) = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\Big(\frac{n\pi}{L} x\Big)\, \mathrm{d}x.$$