Matematisk modellering og numeriske metoder

Metoder

Morten Grud Rasmussen

9. december 2016

Indhold

1 Analytiske metoder **3**
1.1 Metoder til ODE'er af første orden . . . 3
1.1.1 Separation af de variable . . . 3
1.1.2 Eksakte ODE'er . . . 3
1.1.3 Integrerende faktorer . . . 4
1.1.4 Homogene lineære ODE'er . . . 4
1.1.5 Inhomogene lineære ODE'er . . . 5
1.1.6 Bernoulli-ligningen . . . 5
1.2 Metoder til ODE'er af anden orden . . . 5
1.2.1 Homogene lineære ODE'er . . . 5
1.2.1.1 Linearitet af løsninger/superpositionsprincippet . . . 5
1.2.1.2 Reduktion af orden . . . 5
1.2.1.3 Konstante koefficienter . . . 6
1.2.1.4 Euler-Cauchy-ligninger . . . 6
1.2.2 Ikke-homogene, lineære ODE'er . . . 7
1.2.2.1 Linearitet af løsninger/superpositionsprincippet . . . 7
1.2.2.2 De ubestemte koefficienters metode . . . 7
1.2.2.3 Forstyrrede masse-fjeder-systemer . . . 8
1.2.2.4 De arbitrære parametres variationsmetode . . . 8
1.3 Laplace-transformationen . . . 9
1.3.1 Laplace-transformationen af udvalgte funktioner . . . 9
1.3.2 Linearitet af Laplace-transformationen og dens inverse . . . 9
1.3.3 Forskydning af s-variablen . . . 9
1.3.4 Laplace-transformationen af afledede . . . 9
1.3.5 Laplace-transformationen af integraler . . . 9
1.3.6 Løsning af begyndelsesværdiproblemer . . . 10

1.3.6.1 Begyndelsesværdiproblemer med $t_0 = 0$ 10
1.3.6.2 Forskydning af begyndelsesværdibetingelsen 10
1.3.7 Partialbrøker 10
1.4 Systemer af ODE'er 11
1.4.1 Konvertering af ODE'er af orden n til systemer af n ODE'er af orden 1 . . . 11
1.4.2 Systemer af ODE'er af orden 1 med konstante koefficientmatricer 12
1.5 Fourierrækker 12
1.5.1 Udregning af Fourierkoefficienter mm. 12
1.5.2 Lige og ulige funktioner 13
1.5.3 Linearitet af Fourierkoefficienter 13
1.5.4 Periodeskift 13
1.5.5 Halvsidige udviklinger 13
1.6 Metoder til PDE'er af anden orden 14
1.6.1 Den éndimensionelle bølgeligning 14
1.6.1.1 Fourierrækkemetoden 14
1.6.1.2 D'Alemberts løsning 15
1.6.2 Den endimensionelle varmeligning 15
1.6.2.1 Randbetingelsen $u(0,t) = u(L,t) = 0$ 15
1.6.2.2 Isolerede endepunkter 16

2 Numeriske metoder **16**
2.1 Løsning af ligninger 16
2.1.1 Fikspunktiteration 16
2.1.2 Newtons metode 16
2.1.3 Sekantmetoden 17
2.2 Interpolationspolynomier 17
2.2.1 Polynomium gennem $n+1$ punkter 17
2.2.1.1 Lagrange-interpolation 17
2.2.1.2 Newtons divideret differens-metode 18
2.2.2 Polynomiumsapproksimation af funktioner 18
2.3 Numerisk integration 18
2.3.1 Midtpunktsreglen 18
2.3.2 Trapezreglen 19
2.3.3 Simpsons regel 19
2.3.4 Gauss-kvadratur 19
2.4 Enkeltskridtsmetoder til numerisk løsning af ODE'er af første orden 20
2.4.1 Euler-metoden 20
2.4.2 Heuns metode 20
2.4.3 RK4-metoden 21
2.4.4 Runge-Kutta-Fehlberg 21
2.4.5 Baglæns Euler 22
2.5 Mangeskridtsmetoder til numerisk løsning af ODE'er af første orden 22
2.5.1 Adams-Bashforth-metoder 22
2.5.2 Adams-Moulton-metoder 23
2.6 Metoder til førsteordenssystemer 23
2.6.1 Euler-metoden 23

2.6.2 RK4 . . . 24
2.6.3 Baglæns Euler . . . 24
2.7 Metoder til numerisk løsning af ODE'er af anden orden . . . 24
2.7.1 Runge-Kutta-Nyström-metoder . . . 24
2.7.1.1 $y''(x) = f(x, y(x), y'(x))$ . . . 24
2.7.1.2 $y''(x) = f(x, y(x))$ . . . 25
2.8 Numerisk metode til Laplace- og Poisson-ligningerne i to dimensioner . . . 25
2.8.1 Regulær rand . . . 26
2.8.1.1 Dirichlet-randbetingelser . . . 26
2.8.1.2 Neumann- og blandede randbetingelser . . . 26
2.8.2 Irregulær rand . . . 27
2.8.2.1 Dirichlet-randbetingelser . . . 27
2.8.3 Gauss-Seidel-iterationsmetoden . . . 27

1 Analytiske metoder

1.1 Metoder til ODE'er af første orden

1.1.1 Separation af de variable

En ODE, som kan omskrives til formen

$$g(y(x))y'(x) = f(x)$$

kan løses ved at finde følgende integraler:

$$\int g(y)\,\mathrm{d}y = \int f(x)\,\mathrm{d}x + k,$$

og herefter isolere y.

1.1.2 Eksakte ODE'er

En ODE, som kan omskrives til formen

$$M(x, y(x)) + N(x, y(x))y'(x) = 0,$$

hvor N og M opfylder

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial N}{\partial x}(x, y),$$

kan løses ved at finde en funktion u af to variable, som opfylder, at

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = M(x, y) \quad \text{og} \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = N(x, y).$$

Funktionen u kan findes ved først at integrere M mht. første variable:

$$f(\cdot, y) = \int M(t, y)\,\mathrm{d}t,$$

og herefter definere

$$g(y) = N(x,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y),$$

(bemærk, at g viser sig kun at afhænge af én variabel) hvorefter u er givet ved

$$u(x,\cdot) = f(x,\cdot) + \int g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Bemærk, at alle ubestemte integraler er funktioner af en (unavngiven) variabel, som er repræsenteret ved en prik $(\cdot)$ alle andre steder, den indgår i en given ligning. I noterne kaldes funktionen $\int g(t)\,\mathrm{d}t$ for k og f har intet navn.

1.1.3 Integrerende faktorer

Visse ODE'er, som ikke er eksakte, kan gøres eksakte ved at gange igennem med en *integrerende faktor*. I visse tilfælde kan følgende resultat bruges til at finde en integrerende faktor.

Sætning 1.1. *Hvis funktionerne P og Q i ODE'en*

$$P(x,y(x)) + Q(x,y(x))y'(x) = 0$$

opfylder, at

$$R(x,y) = \frac{1}{Q(x,y)}\Big(\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)\Big)$$

er konstant som funktion af y for fast x, så er

$$F(x,y) = F(x) = \exp\int^x R(x_1,y)\,\mathrm{d}x_1$$

en integrerende faktor. Tilsvarende, hvis

$$R^*(x,y) = \frac{1}{P(x,y)}\Big(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\Big)$$

er konstant som funktion af x for fast y, så er

$$F^*(x,y) = F^*(y) = \exp\int^y R^*(x,y_1)\,\mathrm{d}y_1$$

en integrerende faktor.

1.1.4 Homogene lineære ODE'er

For alle tal c er

$$y = ce^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x},$$

en løsning til ODE'er, som kan omskrives til formen

$$y'(x) + p(x)y(x) = 0.$$

1.1.5 Inhomogene lineære ODE'er

En ODE, som kan omskrives til formen

$$y'(x) + p(x)y(x) = r(x)$$

har følgende løsninger:

$$y = e^{-h}\Big(\int e^{h(x)} r(x)\,\mathrm{d}x + c\Big), \quad \text{hvor} \quad h = \int p(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{og} \quad c \in \mathbb{R}.$$

1.1.6 Bernoulli-ligningen

En ODE, som kan omskrives til formen

$$y'(x) + p(x)y(x) = g(x)y(x)^a,$$

hvor $a \neq 1$, kan løses ved først at finde en løsning u til følgende lineære ODE af første orden:

$$u'(x) + (1-a)p(x)u(x) = (1-a)g(x),$$

og herefter sætte

$$y(x) = u(x)^{\frac{1}{1-a}}.$$

1.2 Metoder til ODE'er af anden orden

1.2.1 Homogene lineære ODE'er

1.2.1.1 Linearitet af løsninger/superpositionsprincippet

Hvis y_1 og y_2 er defineret på samme interval og begge er løsninger til ODE'en

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0, \tag{1}$$

så er $y = ay_1 + by_2$ også en løsning for alle valg af reelle tal $a,b \in \mathbb{R}$. Løsningerne y_1 og y_2 er lineært uafhængige hvis og kun hvis Wronski-determinanten $W(y_1,y_2)(x) = y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1(x)$ er forskellig fra 0 for ét (og dermed alle) x. Hvis p og q er kontinuerte og y_1 og y_2 er lineært uafhængige, så er alle løsninger på formen $y = ay_1 + by_2$ og et begyndelsesværdiproblem (1) med

$$y(x_0) = K_0, \qquad y'(x_0) = K_1$$

har en entydig løsning.

1.2.1.2 Reduktion af orden

Antag, at y_1 er en løsning til ODE'en

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0.$$

Så er

$$y_2 = y_1 u, \quad \text{hvor} \quad u = \int v_1(x)\,\mathrm{d}x, \quad \text{og} \quad v_1 = \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}$$

også en løsning, og y_1 og y_2 er lineært uafhængige.

Bemærk, at vi er ligeglade med integrationskonstanterne, da det i det ene tilfælde blot svarer til at gange vores løsning med et positivt tal, og i det andet tilfælde svarer til at lægge en skalering af y_1 til.

1.2.1.3 Konstante koefficienter

Løsningerne til en ODE, som kan omskrives til formen

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = 0,$$

afhænger af fortegnet af diskriminanten $a^2 - 4b$.

$a^2 - 4b > 0$: Alle løsninger kan skrives på formen

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_+ x} + c_2 e^{\lambda_- x},$$

hvor $\lambda_\pm = \frac{-a \pm \sqrt{a^2-4b}}{2}$ og $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

$a^2 - 4b = 0$: Alle løsninger kan skrives på formen

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_0 x} + c_2 x e^{\lambda_0 x},$$

hvor $\lambda_0 = -\frac{a}{2}$ og $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

$a^2 - 4b < 0$: Alle løsninger kan skrives på formen

$$y(x) = c_1 e^{-\frac{ax}{2}} \sin(\omega x) + c_2 e^{-\frac{ax}{2}} \cos(\omega x),$$

hvor $\omega = \sqrt{b - \frac{1}{4}a^2}$.

1.2.1.4 Euler-Cauchy-ligninger

Løsningerne til en ODE, som kan omskrives til formen

$$x^2 y''(x) + axy'(x) + by(x) = 0,$$

afhænger af fortegnet af diskriminanten $(a-1)^2 - 4b$.

$(a-1)^2 - 4b > 0$: Alle løsninger kan skrives på formen

$$y(x) = c_1 x^{m_+} + c_2 x^{m_-},$$

hvor $m_\pm = \frac{1-a}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}(a-1)^2 - b}$ og $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

$(a-1)^2 - 4b = 0$: Alle løsninger kan skrives på formen

$$y(x) = c_1 x^{\frac{1-a}{2}} + c_2 \ln(|x|) x^{\frac{1-a}{2}}.$$

$(a-1)^2 - 4b < 0$: Alle løsninger kan skrives på formen

$$y(x) = c_1 x^{\frac{1-a}{2}} \sin(\omega \ln(x)) + c_2 x^{\frac{1-a}{2}} \cos(\omega \ln(x)),$$

hvor $\omega = \sqrt{b - \frac{1}{4}(a-1)^2}$.

1.2.2 Ikke-homogene, lineære ODE'er

1.2.2.1 Linearitet af løsninger/superpositionsprincippet

Løsningsmængden til en ODE, som kan omskrives til formen

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = r(x) \tag{2}$$

hvor $r \not\equiv 0$ er *ikke* lineært, men hvis y_p er en løsning til (2) (en *partikulær* løsning), så kan enhver løsning skrives på formen

$$y_g = y_p + y_h,$$

hvor y_h er en løsning til den tilhørende homogene ligning

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0, \tag{3}$$

hvis løsningsrum er lineært. Tilsvarende, hvis y_p og $\tilde{y}_p$ er to løsninger til (2), så er $y_h = y_p - \tilde{y}_p$ en løsning til (3).

1.2.2.2 De ubestemte koefficienters metode

Denne metode går ud på at lave kvalificerede gæt y_p på en løsning til en ODE, som kan skrives på formen

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = r(x), \tag{4}$$

hvor a og b er konstanter, mens $r = \sum_i r_i$ er en sum af af funktioner, som kan skrives på en af følgende måder: $ke^{\gamma x}$, kx^n, $k\sin(\omega x)$, $k\cos(\omega x)$, $ke^{\alpha x}\sin(\omega x)$, $ke^{\alpha x}\cos(\omega x)$. Her er k, γ og ω reelle konstanter, mens $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Det kvalificerede gæt y_p har et led f_i pr. led r_i, der indgår i r, og disse led vælges efter følgende tabel.

Led r_i i $r(x)$	Valg af led f_i i $y_p(x)$
$ke^{\gamma x}$	$Ce^{\gamma x}$
kx^n ($n \in \mathbb{N}$)	$K_n x^n + K_{n-1}x^{n-1} + \cdots + K_1 x^1 + K_0$
$k\sin(\omega x)$, $k\cos(\omega x)$	$K\cos(\omega x) + M\sin(\omega x)$
$ke^{\alpha x}\cos(\omega x)$, $ke^{\alpha x}\sin(\omega x)$	$e^{\alpha x}(K\cos(\omega x) + M\sin(\omega x))$

Her er konstanterne γ, n, ω og α de samme som i det tilsvarende led i r, mens C, K, M og K_j, $j = 0, \ldots, n$ er ukendte konstanter, der er unikke for hvert led i $y_p = \sum f_i$, og som skal bestemmes. Hvis et led f_i er en løsning til den tilsvarende homogene ODE,

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = 0, \tag{5}$$

så erstattes f_i med funktionen $\tilde{f}_i \colon x \mapsto xf_i$. Hvis også $\tilde{f}_i$ er en løsning til (5), så erstattes f_i med $x \mapsto x^2 f_i = x\tilde{f}_i$. Gættet y_p indsættes nu i (4), hvorefter de ukendte konstanter bestemmes.

1.2.2.3 Forstyrrede masse-fjeder-systemer

Betragt ODE'en

$$my''(t) + cy'(t) + ky(t) = F_0 \cos(\omega t),$$

hvor m, k, F_0 og ω er positive konstanter mens c er ikke-negativ og lad $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Hvis $c > 0$ eller $\omega \neq \omega_0$, så er

$$y_p(t) = a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t) = C\cos(\omega t + \delta)$$

en løsning, hvis $a = F_0 \dfrac{m(\omega_0^2 - \omega^2)}{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 c^2}$ og $b = F_0 \dfrac{\omega c}{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 c^2}$ eller $\tan(\delta) = \frac{\omega c}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$ og $C = \frac{F_0}{\sqrt{m^2(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2c^2}}$.

Hvis $c = 0$ og $\omega \neq \omega_0$, så reducerer det til

$$y_p(t) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}\cos(\omega t)$$

og $\rho = \frac{k}{F_0}a = \frac{1}{1-(\frac{\omega}{\omega_0})^2}$ kaldes *resonansfaktoren*. En anden løsning for $c = 0$ og $\omega \neq \omega_0$ er

$$\tilde{y}_p(t) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \sin\left(\tfrac{\omega_0+\omega}{2}t\right)\sin\left(\tfrac{\omega_0-\omega}{2}\right).$$

Hvis $c = 0$ og $\omega = \omega_0$, så er

$$y_p(t) = \frac{F_0}{2m\omega_0}t$$

en løsning.

Hvis $0 < c^2 \leq 2mk$, så har løsningerne den største amplitude når $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{c^2}{2m^2}}$ og i dette tilfælde går alle løsninger mod

$$y_p(t) = \frac{2mF_0}{c\sqrt{4m^2\omega_0^2 - c^2}}\cos(\omega t - \delta),$$

hvor $\tan(\delta) = \frac{2m\omega}{c}$ når $t \to \infty$.

1.2.2.4 De arbitrære parametres variationsmetode

En ODE, som kan omskrives til formen

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = r(x),$$

hvor p, q og r er kontinuerte funktioner, har løsningen

$$y_p = -y_1 \int \frac{y_2(x)r(x)}{W(x)}\,\mathrm{d}x + y_2 \int \frac{y_1(x)r(x)}{W(x)}\,\mathrm{d}x,$$

hvor y_1 og y_2 er løsninger til det tilhørende homogene problem,

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0,$$

og $W = y_1y_2' - y_1'y_2$.

1.3 Laplace-transformationen

1.3.1 Laplace-transformationen af udvalgte funktioner

$f(t)$	1	t	t^2	$\underset{n=0,1,2,\ldots}{t^n}$	$\underset{a\geq 0}{t^a}$	e^{at}
$\mathcal{L}(f)(s)$	$\frac{1}{s}$	$\frac{1}{s^2}$	$\frac{2!}{s^3}$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$	$\frac{1}{s-a}$

$f(t)$	$\cos(\omega t)$	$\sin(\omega t)$	$\cosh(at)$	$\sinh(at)$	$e^{at}\cos(\omega t)$	$e^{at}\sin(\omega t)$
$\mathcal{L}(f)(s)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\frac{s}{s^2-a^2}$	$\frac{a}{s^2-a^2}$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$	$\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$

1.3.2 Linearitet af Laplace-transformationen og dens inverse

Laplace-transformationen er lineær, dvs. hvis man kender Laplace-transformationen $\mathcal{L}(f)$ af f og Laplace-transformationen $\mathcal{L}(g)$ af g, så kan man udregne Laplace-transformationen af $af + bg$, hvor a og b er reelle tal, på følgende måde:

$$\mathcal{L}(af + bg) = a\mathcal{L}(f) + b\mathcal{L}(g).$$

TIlsvarende er Laplace-transformationens inverse lineær, dvs. hvis man kender $\mathcal{L}^{-1}(F) = f$ og $\mathcal{L}^{-1}(G) = g$, så kan man udregne den inverse Laplace-transformation af $aF + bG$, hvor a og b er reelle tal, på følgende måde:

$$\mathcal{L}^{-1}(aF + bG) = a\mathcal{L}^{-1}(F) + b\mathcal{L}^{-1}(G).$$

1.3.3 Forskydning af s-variablen

Hvis $\mathcal{L}(f) = F$, og $g(t) = e^{at}f(t)$, så er $\mathcal{L}(g)(s) = \mathcal{L}(t \mapsto e^{at}f(t))(s) = F(s-a)$.

1.3.4 Laplace-transformationen af afledede

Hvis Laplace-transformationen $F = \mathcal{L}(f)$ af f og f's afledede eksisterer, så er

$$\mathcal{L}(f^{(n)})(s) = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - s^1f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0).$$

Specielt er

$$\mathcal{L}(f'')(s) = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$$

og

$$\mathcal{L}(f')(s) = sF(s) - f(0).$$

1.3.5 Laplace-transformationen af integraler

Hvis Laplace-transformationen $\mathcal{L}(f) = F$ af f og Laplace-transformationen af integralet af f eksisterer, dvs. hvis Laplace-transformationen $G = \mathcal{L}(g)$ af funktionen g givet ved $g(t) = \int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x$ eksisterer, så er

$$G(s) = \mathcal{L}(g)(s) = \mathcal{L}(t \mapsto \int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x)(s) = \frac{1}{s}F(s).$$

1.3.6 Løsning af begyndelsesværdiproblemer

1.3.6.1 Begyndelsesværdiproblemer med $t_0 = 0$

Begyndelsesværdiproblemer såsom

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = r(t), \quad y(0) = K_0, \quad y'(0) = K_1,$$

hvor a, b, K_0 og K_1 er konstanter, og funktionen r er tilpas pæn, kan omskrives til et algebraisk problem ved at tage Laplace-transformationen på begge sider:

$$\mathcal{L}(y'' + ay' + by)(s) = \mathcal{L}(r)(t)$$

hvilket i dette tilfælde kan skrives som

$$(s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)) + a(sY(s) - y(0)) + bY(s) = (s^2 + as + b)Y(s) - (s + a)K_0 - K_1 = R(s)$$

hvor $Y = \mathcal{L}(y)$ og $R = \mathcal{L}(r)$. Ved at isolere $Y(s)$ fås

$$Y(s) = \frac{(s + a)K_0 + K_1 + R(s)}{s^2 + as + b} = \big((s + a)K_0 + K_1\big)Q(s) + R(s)Q(s), \tag{6}$$

hvor $Q(s) = \frac{1}{s^2+as+b} = \frac{1}{(s+\frac{1}{2}a)^2+b-\frac{1}{4}a^2}$. Vi kan nu løse begyndelsesværdiproblemet ved at tage den inverse Laplace-transformation af $((s + a)K_0 + K_1)Q(s) + R(s)Q(s)$.

1.3.6.2 Forskydning af begyndelsesværdibetingelsen

Begyndelsesværdiproblemer såsom

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = r(t), \quad y(t_0) = K_0, \quad y'(t_0) = K_1,$$

hvor a, b, K_0 og K_1 er konstanter og $t_0 \neq 0$ kan løses ved at sætte $\tilde{t} = t - t_0$, $\tilde{y}(\tilde{t}) = y(\tilde{t} + t_0)$, løse

$$\tilde{y}''(\tilde{t}) + a\tilde{y}'(\tilde{t}) + b\tilde{y}(\tilde{t}) = r(\tilde{t}), \quad \tilde{y}(0) = K_0, \quad \tilde{y}'(0) = K_1,$$

ved at finde $\tilde{Y}$ og herefter $\tilde{y}(\tilde{t})$, hvorefter y findes ved at benytte, at $y(t) = \tilde{y}(\tilde{t}) = \tilde{y}(t - t_0)$.

1.3.7 Partialbrøker

Antag, at vi har en polynomiumsbrøk på følgende form:

$$\frac{P(s)}{Q(s)},$$

hvor

$$Q(s) = \prod_{i=1}^{n}(s - r_i)\prod_{j=1}^{m}(s^2 + a_js + b_j), \quad \text{hvor} \quad r_i \leq r_{i+1}, a_j \leq a_{j+1},$$

og hvor $s^2 + a_js + b_j$ ingen reelle rødder har for $j = 1, \ldots, m$, og $P(s)$ er et polynomium af grad $n+2m-1$ eller grad $n+2m-2$. Hvis $r_i \neq r_{i+1}$ for alle $i = 1, \ldots, n-1$, og $a_js+b_j \neq a_{j+1}s+b_{j+1}$ for alle $j = 1, \ldots, m-1$, og man kan finde $n+2m$ konstanter, $A_k, B_l, C_l, \in \mathbb{R}$, $k = 1, \ldots, n$, $l = 1, \ldots, m$, så

$$P(s) = \sum_{k=1}^{n} A_k \prod_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{n} (s - r_i) \prod_{j=1}^{m} (s^2 + a_j + b_j) + \sum_{l=1}^{m} (B_l s + C_l) \prod_{i=1}^{n} (s - r_i) \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq l}}^{m} (s^2 + a_j s + b_j), \tag{7}$$

så er

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{s - r_k} + \sum_{l=1}^{m} \frac{B_k s + C_k}{s^2 + a_k s + b_k},$$

hvor vi minder om, at $s^2 + a_k s + b_k = (s + \frac{1}{2}a_k)^2 + b_k - \frac{1}{4}a_k^2$. Hvis vi desuden har, at $m = 0$, så kan konstanterne A_k findes ved blot at indsætte r_k i (7) og isolere A_k:

$$A_k = \frac{P(r_k)}{\prod_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{n} (r_k - r_i)} \qquad \text{(hvis } m = 0\text{)}.$$

Hvis i stedet $r_i = r_{i+1}$ (men $r_{i+1} \neq r_{i+2}$, hvis $i \leq n-2$) for et eller flere $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, og $a_j s + b_j \neq a_{j+1} s + b_{j+1}$ for alle $j = 1, \ldots, m-1$, og man kan finde $n+2m$ konstanter, $A_k, B_l, C_l, \in \mathbb{R}$, $k = 1, \ldots, n$, $l = 1, \ldots, m$, så

$$\begin{aligned} P(s) = A_1 \prod_{i=2}^{n} (s - r_i) \prod_{j=1}^{m} (s^2 + a_j + b_j) + \sum_{\substack{k=2 \\ r_k \neq r_{k-1}}}^{n} A_k \prod_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{n} (s - r_i) \prod_{j=1}^{m} (s^2 + a_j s + b_j) \\ + \sum_{\substack{k=2 \\ r_k = r_{k-1}}}^{n} A_k (s - r_k) \prod_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{n} (s - r_i) \prod_{j=1}^{m} (s^2 + a_j + b_j) \\ + \sum_{l=1}^{m} (B_l s + C_l) \prod_{i=1}^{n} (s - r_i) \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq l}}^{m} (s^2 + a_j + b_j), \end{aligned} \tag{8}$$

så er

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{A_1}{s - r_1} + \sum_{\substack{k=2 \\ r_k \neq r_{k-1}}}^{n} \frac{A_k}{s - r_k} + \sum_{\substack{k=2 \\ r_k = r_{k-1}}}^{n} \frac{A_k}{(s - r_k)^2} + \sum_{l=1}^{m} \frac{B_k s + C_k}{s^2 + a_k s + b_k}. \tag{9}$$

Lignende tricks virker også i tilfældet hvor $r_i = r_{i+1} = \cdots = r_{i+k}$ for $k \geq 2$ og et (eller flere) $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, eller $a_j s + b_j = a_{j+1} s + b_{j+1}$ for et $j \in \{1, \ldots, m-1\}$, men formlerne svarende til (8) og (9) bliver tilsvarende mere komplicerede. Det anbefales her at prøve sig frem med passende udtryk i stil med (9) og herfra finde et udtryk a la (8) ved at gange igennem med $Q(s)$ på begge sider.

1.4 Systemer af ODE'er

1.4.1 Konvertering af ODE'er af orden n til systemer af n ODE'er af orden 1

En ODE af orden n på formen

$$y^{(n)}(t) = F(t, y(t), y'(t), \ldots, y^{(n-1)}(t))$$

er ækvivalent med følgende system af n ODE'er af første orden:

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= y_3 \\ &\cdots \\ y_{n-1}' &= y_n \\ y_n' &= F(t,y_1,y_2,\ldots,y_n) \end{aligned}$$

via identifikationen

$$y_1 = y, \quad y_2 = y', \quad y_3 = y'', \quad \cdots \quad y_n = y^{(n-1)}.$$

1.4.2 Systemer af ODE'er af orden 1 med konstante koefficientmatricer

Et system af n ODE'er af orden 1 på formen

$$y' = Ay,$$

hvor A er en konstant koefficientmatrix, som har de reelle egenværdier $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ med tilhørende egenvektorer $v_1, v_2, \ldots, v_n$ har den generelle løsning

$$c_1 v_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 v_2 e^{\lambda_2 t} + \cdots + c_n v_n e^{\lambda_n t},$$

hvor $c_1, c_2, \ldots, c_n$ er reelle konstanter.

1.5 Fourierrækker

1.5.1 Udregning af Fourierkoefficienter mm.

Hvis f er en 2π-periodisk funktion, som er tilpas pæn, så er f's Fourierkoefficienter givet ved

$$\begin{aligned} a_0(f) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x, \\ a_n(f) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x \quad \text{og} \\ b_n(f) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

for alle $n \in \mathbb{N}$ og Fourierrækken for f er givet ved

$$a_0(f) + \sum_{n=1}^{\infty}\big(a_n(f)\cos(nx) + b_n(f)\sin(nx)\big). \tag{10}$$

Hvis f er stykkevist kontinuert med venstre- og højreafledede overalt, så er den tilpas pæn i ovenstående forstand, og Fourierrækken (10) konvergerer punktvis mod f i f's kontinuitetspunkter, mens den konvergerer mod gennemsnittet af højre og venstre grænseværdi i diskontinuitetspunkter.

1.5.2 Lige og ulige funktioner

Hvis f er 2π-periodisk, tilpas pæn og lige (dvs. $f(-x) = f(x)$), så er $b_n(f) = 0$ for alle $n \geq 1$ og $a_n(f)$, $n \geq 0$, kan udregnes på følgende vis:

$$a_0(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{og} \quad a_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x \quad \text{for } n = 1,2,3,\ldots.$$

Hvis f er 2π-periodisk, tilpas pæn og ulige (dvs. $f(-x) = -f(x)$), så er $a_n(f) = 0$ for alle $n \geq 0$ og $b_n(f)$, $n \geq 1$, kan udregnes på følgende vis:

$$b_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x.$$

1.5.3 Linearitet af Fourierkoefficienter

Hvis f og g har Fourierkoefficienterne $a_0(f)$, $a_n(f)$ og $b_n(f)$ hhv. $a_0(g)$, $a_n(g)$ og $b_n(g)$, så har funktionen $c_1f + c_2g$, hvor c_1 og c_2 er reelle tal, Fourierkoefficienterne

$$\begin{aligned}
a_0(c_1f + c_2g) &= c_1a_0(f) + c_2a_0(g),\\
a_n(c_1f + c_2g) &= c_1a_n(f) + c_2a_n(g) \quad \text{og}\\
b_n(c_1f + c_2g) &= c_1b_n(f) + c_2b_n(g),
\end{aligned}$$

hvor $n = 1, 2, 3, \ldots,$

1.5.4 Periodeskift

Hvis f er $2L$-periodisk, så er Fourierrækken for f givet ved

$$a_0(f) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n(f)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + b_n(f)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\right),$$

hvor

$$\begin{aligned}
a_0(f) &= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\,\mathrm{d}x\\
a_n(f) &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\mathrm{d}x\\
b_n(f) &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

for $n = 1, 2, 3, \ldots.$

1.5.5 Halvsidige udviklinger

Hvis $f\colon [0, L] \to \mathbb{R}$ er kontinuert, så er

$$f(x) = a_0(f) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(f)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

for alle $x \in (0, L)$, hvor

$$\begin{aligned}
a_0(f) &= \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\,\mathrm{d}x \\
a_n(f) &= \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\Big(\frac{n\pi}{L}x\Big)\,\mathrm{d}x \quad \text{og} \\
b_n(f) &= \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\Big(\frac{n\pi}{L}x\Big)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Funktionerne f_l og f_u defineret for alle $x \in \mathbb{R}$ og givet ved

$$f_l(x) = a_0(f) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f)\cos\Big(\frac{n\pi}{L}x\Big) \quad \text{og} \quad f_u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(f)\sin\Big(\frac{n\pi}{L}x\Big)$$

er hhv. den lige og den ulige $2L$-periodiske udvidelse af f.

1.6 Metoder til PDE'er af anden orden

1.6.1 Den éndimensionelle bølgeligning

Den éndimensionelle bølgeligning

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad \text{hvor} \quad c^2 = \frac{T}{\rho}, \tag{11}$$

på $(x, t) \in [0, L] \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ med randbetingelsen

$$u(0, t) = u(L, t) = 0 \tag{12}$$

og begyndelsesværdibetingelserne

$$u(x, 0) = f(x) \tag{13}$$

og

$$u_t(x, 0) = g(x), \tag{14}$$

hvor $f, g \colon [0, L] \to \mathbb{R}$ er to tilpas pæne funktioner, kan løses som beskrevet i de efterfølgende underunderafsnit.

1.6.1.1 Fourierrækkemetoden

Lad $\lambda_n = \frac{cn\pi}{L}$ og

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \big(b_n \cos(\lambda_n t) + b_n^* \sin(\lambda_n t)\big)\sin\Big(\frac{n\pi}{L}x\Big),$$

hvor b_n'erne er Fourierkoefficienterne til den $2L$-periodiske, ulige, halvsidige udvikling af f

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\Big(\frac{n\pi}{L}x\Big)\,\mathrm{d}x$$

og

$$b_n^* = \frac{2}{cn\pi}\int_0^L g(x)\sin\Big(\frac{n\pi}{L}x\Big)\,\mathrm{d}x.$$

Så er u løsningen til bølgeligningen (11) med randbetingelsen (12) og begyndelsesværdibetingelserne (13) og (14). Funktionerne $u_n(x,t) = \big(b_n\cos(\lambda_n t) + b_n^*\sin(\lambda_n t)\big)\sin\big(\frac{n\pi}{L}x\big)$ kaldes *egenfunktioner* med *egenværdier* λ_n og har frekvenserne $\frac{\lambda_n}{2\pi}$. Mængden $\{\lambda_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ kaldes *spektrummet*, u_1 kaldes *fundamentaltilstanden*, mens u_n kaldes for *overtoner* for $n \geq 1$.

1.6.1.2 D'Alemberts løsning

Lad

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\big(f(x+ct) + f(x-ct)\big) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\,\mathrm{d}s,$$

hvor f og g antages ulige og $2L$-periodiske. Så er u løsningen til bølgeligningen (11) med randbetingelsen (12) og begyndelsesværdibetingelserne (13) og (14).

1.6.2 Den endimensionelle varmeligning

Løsningen af den éndimensionelle varmeligning

$$u_t = c^2 u_{xx}, \quad \text{hvor} \quad c^2 = \frac{K}{\sigma\rho}, \tag{15}$$

på $(x,t) \in [0,L] \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ og begyndelsesværdibetingelsen

$$u(x,0) = f(x) \tag{16}$$

hvor $f\colon [0,L] \to \mathbb{R}$ er en tilpas pæn funktion, afhænger af randbetingelsen som beskrevet i de efterfølgende underunderafsnit.

1.6.2.1 Randbetingelsen $u(0,t) = u(L,t) = 0$

Hvis begge ender fastholdes på temperaturen 0, så har systemet randbetingelsen

$$u(0,t) = u(L,t) = 0. \tag{17}$$

I givet fald er

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(f)\sin\Big(\frac{n\pi}{L}x\Big)e^{-\lambda_n^2 t},$$

hvor $\lambda_n = \frac{cn\pi}{L}$ og

$$b_n(f) = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\Big(\frac{n\pi}{L}x\Big)\,\mathrm{d}x,$$

løsningen til (15) med begyndelsesværdibetingelsen (16) og randbetingelserne (17). Koefficienterne $b_n(f)$ er altså Fourierkoefficienterne for den $2L$-periodiske, ulige, halvsidige udvikling af f. Funktionerne $u_n(x,t) = \sin\big(\frac{n\pi}{L}x\big)e^{-\lambda_n^2 t}$ kaldes for problemets *egenfunktioner* med *egenværdier* λ_n.

1.6.2.2 Isolerede endepunkter

Hvis begge ender er isolerede, så har systemet randbetingelsen

$$u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0. \tag{18}$$

I givet fald er

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) = a_0(f) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f) \cos\Big(\frac{n\pi}{L}x\Big) e^{-\lambda_n^2 t},$$

hvor $\lambda_n = \frac{cn\pi}{L}$ og

$$a_0(f) = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{og} \quad a_n(f) = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\Big(\frac{n\pi}{L}x\Big)\,\mathrm{d}x \quad \text{for} \quad n \geq 1,$$

løsningen til (15) med begyndelsesværdibetingelsen (16) og randbetingelsen (18). Koefficienterne $a_0(f)$ og $a_n(f)$ er altså Fourierkoefficienterne for den $2L$-periodiske, lige, halvsidige udvikling af f. Funktionerne $u_n(x,t) = \sin\big(\frac{n\pi}{L}x\big)e^{-\lambda_n^2 t}$ kaldes for problemets *egenfunktioner* med *egenværdier* λ_n.

2 Numeriske metoder

2.1 Løsning af ligninger

2.1.1 Fikspunktiteration

Antag, at vi vil finde en løsning til en ligning på formen

$$g(x) = x.$$

Lad x_0 være et gæt på en løsning s til ligningen $g(x) = x$. Definér nu rekursivt

$$x_1 = g(x_0), \quad x_2 = g(x_1), \quad \ldots, \quad x_{n+1} = g(x_n), \quad \ldots,$$

for alle $n \geq 1$. I visse tilfælde vil følgen $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ nu nærme sig løsningen s, når n vokser, altså $x_n \to s$ for $n \to \infty$. En tilstrækkelig betingelse er givet i sætningen nedenfor.

Sætning 2.1. *Lad s være en løsning til $x = g(x)$ og antag, at g er kontinuert differentiabel i et interval J omkring s. Hvis $|g'(x)| \leq K < 1$ i J, så konvergerer følgen $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ mod $x_\infty = s$, såfremt $x_0 \in J$.*

2.1.2 Newtons metode

Antag, at vi vil finde en løsning til en ligning på formen

$$f(x) = 0,$$

hvor f er en kontinuert differentiabel funktion. Lad x_0 være et gæt på en løsning s til ligningen $f(x) = 0$. Definér nu rekursivt

$$x_1 = s_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}, \quad x_2 = x_2 - \frac{f(x_1)}{f'(x_2)}, \quad \ldots, \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad \ldots,$$

for alle $n \geq 1$. I visse tilfælde vil følgen $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ nu nærme sig løsningen s, når n vokser, altså $x_n \to s$ for $n \to \infty$. Følgende sætning udtaler sig om hastigheden af konvergensen.

Sætning 2.2. *Hvis f er to gange differentiabel og $f'(s)$ ikke er 0, hvor $f(s) = 0$ er en løsning, så er Newtons metode mindst af orden 2.*

2.1.3 Sekantmetoden

Antag, at vi vil finde en løsning til en ligning på formen

$$f(x) = 0.$$

Lad x_0 og x_1 være to forskellige gæt på en løsning s til ligningen $f(x) = 0$. Definér nu rekursivt

$$x_2 = x_1 - f(x_1)\frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)}, \qquad x_3 = x_2 - f(x_2)\frac{x_2 - x_1}{f(x_2) - f(x_1)},$$

$$\dots$$

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})},$$

$$\dots$$

for alle $n \geq 1$. I visse tilfælde vil følgen $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ nu nærme sig løsningen s, når n vokser, altså $x_n \to s$ for $n \to \infty$.

2.2 Interpolationspolynomier

2.2.1 Polynomium gennem $n + 1$ punkter

Givet $n + 1$ punkter i planen, (x_i, y_i), $i = 0, \dots, n$, hvor $x_i \neq x_i$ når $i \neq j$, findes et entydigt polynomium p_n af grad (højst) n, som opfylder, at $p_n(x_i) = y_i$.

2.2.1.1 Lagrange-interpolation

Lad (x_i, y_i), $i = 0, \dots, n$ være $n + 1$ punkter i planen hvor $x_i \neq x_j$ for $i \neq j$. Lad

$$\ell_j(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{n} (x - x_i) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{j-1})(x - x_{j+1}) \cdots (x - x_n)$$

og

$$L_j(x) = \frac{l_j(x)}{l_j(x_j)}.$$

Så er

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(x)$$

det polynomium af grad (højst) n, som opfylder, at $p_n(x_i) = y_i$.

2.2.1.2 Newtons divideret differens-metode

Lad (x_i, y_i), $i = 0, \ldots, n$ være $n+1$ punkter i planen hvor $x_i \neq x_j$ for $i \neq j$. Lad

$$f[x_i] = y_i,$$

$$f[x_0, \ldots, x_k] = \frac{f[x_1, \ldots, x_k] - f[x_0, \ldots, x_{k-1}]}{x_k - x_0},$$

og

$$g_i(x) = f[x_0, \ldots, x_i](x - x_0) \cdots (x - x_{i-1}) = f[x_0, \ldots, x_i] \prod_{j<i} (x - x_j).$$

Så er

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} g_i(x)$$

det polynomium af grad (højst) n, som opfylder, at $p_n(x_i) = y_i$.

2.2.2 Polynomiumsapproksimation af funktioner

Hvis $f\colon A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$ er en funktion, som vi kender værdien af i x_i, $i = 0, \ldots, n$, hvor $x_i \neq x_j$ for $i \neq j$, altså hvis vi kender $f(x_i)$ for $i = 0, \ldots, n$, så kaldes polynomiet p_n gennem $(x_i, f(x_i))$, $i = 0, \ldots, n$ for en *polynomiumsapproksimation* af f. Hvis $x \in [\min_i(x_i), \max_i(x_i)]$, så kaldes $p_n(x)$ for den *interpolerede værdi*, mens $p_n(x)$ kaldes den *ekstrapolerede værdi*, hvis $x \notin [\min_i(x_i), \max_i(x_i)]$. Hvis vi for et $x \in [\min_i(x_i), \max_i(x_i)]$ bruger $p_n(x)$ i stedet for $f(x)$, så er fejlen

$$\varepsilon_n = f(x) - p_n(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n) \frac{f^{(n+1)}(t_x)}{(n+1)!}$$

for et $t_x \in [\min_i(x_i), \max_i(x_i)]$. Vi kan altså finde en øvre og en nedre grænse for ε_n ved at finde øvre og nedre grænser for $f^{(n+1)}$.

2.3 Numerisk integration

2.3.1 Midtpunktsreglen

Lad $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$. For et $n \in \mathbb{N}$ sætter vi $h = \frac{b-a}{n}$ og $x_0 = a$, $x_i = x_0 + ih$ for $i = 1, \ldots, n$.. Så er

$$J_n^m = h \sum_{i=1}^{n} f(x_i - \tfrac{h}{2})$$

en approksimation af $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ og hvis f er tilpas pæn – eksempelvis hvis f er kontinuert – så har vi at $J_n^m \to \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ for $n \to \infty$. Midtpunktsreglen har præcisionsgrad 1.

2.3.2 Trapezreglen

Lad $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. For et $n \in \mathbb{N}$ sætter vi $h = \frac{b-a}{n}$ og $x_0 = a$, $x_i = x_0 + ih$ for $i = 1, \dots, n$. Så er

$$J_n^t = \frac{h}{2}\big(f(a) + f(b)\big) + h\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)$$

en approksimation af $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ og hvis f er tilpas pæn – eksempelvis hvis f er kontinuert – så har vi at $J_n^t \to \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ for $n \to \infty$. Hvis f er to gange differentiabel, så findes et $x_t \in [a,b]$ så

$$\varepsilon_n^t = -\frac{b-a}{12}h^2 f''(x_t),$$

hvor $\varepsilon_n^t = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - J_n^t$ er fejlen i approksimationen. Hvis n er et lige tal kan fejlen approksimeres vha. følgende formel:

$$\varepsilon_n^t \approx \frac{1}{3}(J_n^t - J_{\frac{n}{2}}^t).$$

Trapezreglen har præcisionsgrad 1.

2.3.3 Simpsons regel

Lad $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. For et $n \in \mathbb{N}$ sætter vi $h = \frac{b-a}{n}$ og $x_0 = a$, $x_i = x_0 + ih$ for $i = 1, \dots, n$. Så er

$$J_n^S = \frac{h}{6}\big(f(a) + f(b)\big) + \frac{2h}{3}\sum_{i=1}^{n} f(x_i - \tfrac{h}{2}) + \frac{h}{3}\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)$$

en approksimation af $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ og hvis f er tilpas pæn – eksempelvis hvis f er kontinuert – så har vi at $J_n^S \to \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ for $n \to \infty$. Hvis f er fire gange differentiabel, så findes et $x_S \in [a,b]$ så

$$\varepsilon_n^S = -\frac{(b-a)}{2880}h^4 f^{(4)}(x_S),$$

hvor $\varepsilon_n^S = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - J_n^S$ er fejlen i approksimationen. Hvis n er et lige tal kan fejlen approksimeres vha. følgende formel:

$$\varepsilon_n^S \approx \frac{1}{15}(J_n^S - J_{\frac{n}{2}}^S).$$

Simpsons regel har præcisionsgrad 3.

2.3.4 Gauss-kvadratur

Lad $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. For et $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, sætter vi

$$J_n^G = \frac{b-a}{2}\sum_{i=1}^{n} w_i f\Big(\frac{b-a}{2}z_i + \frac{a+b}{2}\Big),$$

for nogle særlige vægte w_i og punkter z_i. For n mellem 2 og 5 kan vægtene og punkterne aflæses i følgende tabel.

Antal målepunkter n	punkter z_i	vægte w_i	præcisionsgrad N
2	$\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	3
3	0	$\frac{8}{9}$	5
	$\pm\sqrt{\frac{3}{5}}$	$\frac{5}{9}$	
4	$\pm\sqrt{\frac{3-2\sqrt{\frac{6}{5}}}{7}}$	$\frac{18+\sqrt{30}}{36}$	7
	$\pm\sqrt{\frac{3+2\sqrt{\frac{6}{5}}}{7}}$	$\frac{18-\sqrt{30}}{36}$	
5	0	$\frac{128}{225}$	9
	$\pm\frac{1}{3}\sqrt{5-2\sqrt{\frac{10}{7}}}$	$\frac{322+13\sqrt{70}}{900}$	
	$\pm\frac{1}{3}\sqrt{5+2\sqrt{\frac{10}{7}}}$	$\frac{322-13\sqrt{70}}{900}$	

Gauss-kvadratur har præcisionsgrad $2n-1$.

2.4 Enkeltskridtsmetoder til numerisk løsning af ODE'er af første orden

Numeriske enkeltskridtsmetoder til løsning af ODE'er af første orden går ud på at finde følger x_n og y_n, med $x_n < x_{n+1}$, så $y(x_n) \approx y_n$, hvor y_n findes ud fra x_{n-1} og y_{n-1}.

2.4.1 Euler-metoden

Betragt begyndelsesværdiproblemet

$$y'(x) = f(x, y(x)), \qquad \text{hvor} \qquad y(x_0) = y_0.$$

Lad $h > 0$ være en skridtlængde og sæt $x_n = x_0 + nh$ for $n = 0, 1, 2, \ldots$. Definér y_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$, rekursivt ved

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n).$$

Så er den lokale diskretiseringsfejl $O(h^2)$ og den globale diskretiseringsfejl $O(h)$. Euler-metoden er altså en førsteordensmetode.

2.4.2 Heuns metode

Betragt begyndelsesværdiproblemet

$$y'(x) = f(x, y(x)), \qquad \text{hvor} \qquad y(x_0) = y_0.$$

Lad $h > 0$ være en skridtlængde og sæt $x_n = x_0 + nh$ for $n = 0, 1, 2, \ldots$. Definér y_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$, rekursivt ved

$$\tilde{y}_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

og

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\big(f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, \tilde{y}_{n+1})\big).$$

Heuns metode er en andenordensmetode med lokal diskretiseringsfejl $O(h^3)$ og global diskretiseringsfejl $O(h^2)$.

2.4.3 RK4-metoden

Betragt begyndelsesværdiproblemet

$$y'(x) = f(x, y(x)), \qquad \text{hvor} \qquad y(x_0) = y_0.$$

Lad $h > 0$ være en skridtlængde og sæt $x_n = x_0 + nh$ for $n = 0, 1, 2, \ldots$. Definér y_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$, rekursivt ved

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}\big(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\big), \qquad \text{for} \qquad n = 0,1,2,\ldots,$$

hvor

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x_n, y_n), \\ k_2 &= hf(x_n + \tfrac{h}{2}, y_n + \tfrac{1}{2}k_1), \\ k_3 &= hf(x_n + \tfrac{h}{2}, y_n + \tfrac{1}{2}k_2), \\ k_4 &= hf(x_n + h, y_n + k_3). \end{aligned}$$

RK4-metoden er en fjerdeordensmetode med lokal diskretiseringsfejl $O(h^5)$ og global diskretiseringsfejl $O(h^4)$. Fejlen $\varepsilon_{2n}^h = y(x_{2n}) - y_{2n}$ kan estimeres ved

$$\varepsilon_{2n}^h \approx \frac{1}{15}(y_{2n}^h - y_n^{2h}).$$

2.4.4 Runge-Kutta-Fehlberg

Betragt begyndelsesværdiproblemet

$$y'(x) = f(x, y(x)), \qquad \text{hvor} \qquad y(x_0) = y_0.$$

Lad $h > 0$ være en skridtlængde og sæt $x_n = x_0 + nh$ for $n = 0, 1, 2, \ldots$. Definér y_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$, rekursivt ved

$$y_{n+1} = y_n + \gamma_1 k_1 + \cdots + \gamma_6 k_6$$

og

$$\tilde{y}_{n+1} = y_n + \tilde{\gamma}_1 k_1 + \cdots + \tilde{\gamma}_5 k_5,$$

hvor

$$\begin{pmatrix}\gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 & \gamma_5 & \gamma_6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{16}{135} & 0 & \frac{6656}{12825} & \frac{28561}{56430} & \frac{-9}{50} & \frac{2}{55}\end{pmatrix}$$

og

$$\begin{pmatrix}\tilde{\gamma}_1 & \tilde{\gamma}_2 & \tilde{\gamma}_3 & \tilde{\gamma}_4 & \tilde{\gamma}_5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{25}{216} & 0 & \frac{1408}{2565} & \frac{2197}{4104} & \frac{-1}{5}\end{pmatrix}$$

mens

$$
\begin{aligned}
k_1 &= hf(x_n, y_n),\\
k_2 &= hf(x_n + \tfrac{1}{4}h, y_n + \tfrac{1}{4}k_1),\\
k_3 &= hf(x_n + \tfrac{3}{8}h, y_n + \tfrac{3}{32}k_1 + \tfrac{9}{32}k_2),\\
k_4 &= hf(x_n + \tfrac{12}{13}, y_n + \tfrac{1932}{2197}k_1 - \tfrac{7200}{2197}k_2 + \tfrac{7296}{2197}k_3),\\
k_5 &= hf(x_n + h, y_n + \tfrac{439}{216}k_1 - 8k_2 + \tfrac{3680}{513}k_3 - \tfrac{845}{4104}k_4)
\end{aligned}
$$

og

$$k_6 = hf(x_n + \tfrac{h}{2}, y_n - \tfrac{8}{27}k_1 + 2k_2 - \tfrac{3544}{2565}k_3 + \tfrac{1859}{4104}k_4 - \tfrac{11}{40}k_5).$$

Et estimat på fejlen $\varepsilon_{n+1} = y(x_{n+1}) - y_{n+1}$ kan udregnes på følgende måde:

$$\varepsilon_{n+1} \approx y_{n+1} - \tilde{y}_{n+1} = \tfrac{1}{360}k_1 - \tfrac{128}{4275}k_3 - \tfrac{2197}{75240}k_4 + \tfrac{1}{50}k_5 + \tfrac{2}{55}k_6.$$

Runge-Kutta-Fehlberg er en femteordensmetode.

2.4.5 Baglæns Euler

Betragt begyndelsesværdiproblemet

$$y'(x) = f(x, y(x)), \qquad \text{hvor} \qquad y(x_0) = y_0.$$

Antag, at f er så tilpas simpel, at y_{n+1} kan isoleres i udtrykket

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1}).$$

Lad $h > 0$ være en skridtlængde og sæt $x_n = x_0 + nh$ for $n = 0, 1, 2, \dots$. Definér y_n, $n = 0, 1, 2, \dots$, rekursivt ved at isolere y_{n+1} i ovenstående formel. Baglæns Euler er kun en førsteordensmetode, men har den fordel, at den kan bruges på stive ODE'er.

2.5 Mangeskridtsmetoder til numerisk løsning af ODE'er af første orden

Numeriske mangeskridtsmetoder til løsning af ODE'er af første orden går ud på at finde følger x_n og y_n, med $x_n < x_{n+1}$, så $y(x_n) \approx y_n$, hvor y_n findes ud fra $x_{n-1}, \dots, x_{n-m}$ og $y_{n-1}, \dots, y_{n-m}$, $m \geq 2$.

2.5.1 Adams-Bashforth-metoder

Betragt begyndelsesværdiproblemet

$$y'(x) = f(x, y(x)), \qquad \text{hvor} \qquad y(x_0) = y_0.$$

Lad $h > 0$ være en skridtlængde og sæt $x_n = x_0 + nh$ for $n = 0, 1, 2, \dots$. Antag, at vi kender y_1, y_2 og y_3. Definér y_n, $n = 4, 5, 6, \dots$, rekursivt ved

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}(55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3}),$$

hvor $f_i = f(x_i, y_i)$ for alle $i = 0, 1, 2, \dots$. Dette er en Adams-Bashforth-metode af fjerde orden.

2.5.2 Adams-Moulton-metoder

Betragt begyndelsesværdiproblemet

$$y'(x) = f(x, y(x)), \qquad \text{hvor} \qquad y(x_0) = y_0.$$

Lad $h > 0$ være en skridtlængde og sæt $x_n = x_0 + nh$ for $n = 0, 1, 2, \ldots$. Antag, at vi kender y_1, y_2 og y_3. Definér y_n, $n = 4, 5, 6, \ldots$, rekursivt ved

$$\tilde{y}_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}(55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3})$$

og

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}(9\tilde{f}_{n+1} + 19f_n - 5f_{n-1} + f_{n-2}), \tag{19}$$

hvor $f_i = f(x_i, y_i)$ og $\tilde{f}_i(x_i, \tilde{y}_i)$ for alle $i = 0, 1, 2, \ldots$. Vi kan estimere fejlen i det $(n+1)$'ste skridt $\varepsilon_{n+1} = y(x_{n+1}) - y_{n+1}$ ved

$$\varepsilon_{n+1} \approx \frac{1}{15}(y_{n+1} - \tilde{y}_{n+1}).$$

Estimeres fejlen til at være uacceptabel stor, kan man gentage processen ved at erstatte $\tilde{y}_{n+1}$ med y_{n+1}. Altså fås

$$\bar{y}_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}(9f_{n+1} + 19f_n - 5f_{n-1} + f_{n-2})$$

og den nye fejl $\bar{\varepsilon}_{n+1} = y(x_{n+1}) - \bar{y}_{n+1}$ kan estimeres ved

$$\bar{\varepsilon}_{n+1} \approx \frac{1}{15}(\bar{y}_{n+1} - y_{n+1}).$$

Denne process kan naturligvis gentages, indtil man estimerer fejlen til at være tilpas lille. Denne prædiktor-korrektor-metode kaldes Adams-Moulton-metoden af fjerde orden. Adams-Moulton-metoden er generelt meget mere præcis end en Adams-Bashforth-metode af samme orden og er desuden numerisk stabil.

2.6 Metoder til førsteordenssystemer

Numeriske metoder til løsning af systemer af ODE'er går ud på at finde følger x_n og Y_n, hvor $x_n < x_{n+1}$, så $Y(x_n) \approx Y_n$.

2.6.1 Euler-metoden

Betragt begyndelsesværdiproblemet

$$Y'(x) = F(x, Y(x)), \qquad \text{hvor} \qquad Y(x_0) = Y_0,$$

hvor Y er en ukendt d-dimensionel vektorfunktion, F er en kendt d-dimensionel funktion af $d+1$ variable, Y_0 er en kendt d-dimensionel vektor og x_0 er et kendt punkt. Lad $h > 0$ være en skridtlængde og sæt $x_n = x_0 + nh$ for $n = 0, 1, 2, \ldots$. Definér Y_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$, rekursivt ved

$$Y_{n+1} = Y_n + hF(x_n, Y_n).$$

Så er den lokale diskretiseringsfejl $O(h^2)$ og den globale diskretiseringsfejl $O(h)$. Euler-metoden er altså en førsteordensmetode.

2.6.2 RK4

Betragt begyndelsesværdiproblemet

$$Y'(x) = F(x, Y(x)), \qquad \text{hvor} \qquad Y(x_0) = Y_0,$$

hvor Y er en ukendt d-dimensionel vektorfunktion, F er en kendt d-dimensionel funktion af $d+1$ variable, Y_0 er en kendt d-dimensionel vektor og x_0 er et kendt punkt. Lad $h > 0$ være en skridtlængde og sæt $x_n = x_0 + nh$ for $n = 0, 1, 2, \ldots$. Definér Y_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$, rekursivt ved

$$Y_{n+1} = Y_n + \tfrac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4),$$

hvor

$$\begin{aligned} K_1 &= hF(x_n, Y_n), \\ K_2 &= hF(x_n + \tfrac{1}{2}h, Y_n + \tfrac{1}{2}K_1), \\ K_3 &= hF(x_n + \tfrac{1}{2}h, Y_n + \tfrac{1}{2}K_2) \end{aligned}$$

og

$$K_4 = hF(x_n + h, Y_n + k_3).$$

RK4-metoden er en fjerdeordensmetode med lokal diskretiseringsfejl $O(h^5)$ og global diskretiseringsfejl $O(h^4)$.

2.6.3 Baglæns Euler

Betragt begyndelsesværdiproblemet

$$Y'(x) = F(x, Y(x)), \qquad \text{hvor} \qquad Y(x_0) = Y_0.$$

Antag, at F er så tilpas simpel, at Y_{n+1} kan isoleres i udtrykket

$$Y_{n+1} = Y_n + hF(x_{n+1}, Y_{n+1}).$$

Lad $h > 0$ være en skridtlængde og sæt $x_n = x_0 + nh$ for $n = 0, 1, 2, \ldots$. Definér Y_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$, rekursivt ved at isolere Y_{n+1} i ovenstående formel. Baglæns Euler er kun en førsteordensmetode, men har den fordel, at den kan bruges på stive ODE'er.

2.7 Metoder til numerisk løsning af ODE'er af anden orden

Numeriske metoder til løsning af ODE'er af anden orden går ud på at finde følger x_n, y_n og y'_n, hvor $x_n < x_{n+1}$, så $y(x_n) \approx y_n$ og $y'(x_n) \approx y'_n$.

2.7.1 Runge-Kutta-Nyström-metoder

2.7.1.1 $y''(x) = f(x, y(x), y'(x))$

Betragt begyndelsesværdiproblemet

$$y''(x) = f(x, y(x), y'(x)), \qquad \text{hvor} \qquad y(x_0) = y_0 \quad \text{og} \quad y'(x_0) = y'_0.$$

Lad $h > 0$ være en skridtlængde og sæt $x_n = x_0 + nh$ for $n = 0, 1, 2, \ldots$. Definér y_n og y'_n for $n = 0, 1, 2, \ldots$, rekursivt ved

$$y_{n+1} = y_n + h(y'_n + \tfrac{1}{3}(k_1 + k_2 + k_3))$$

og

$$y'_{n+1} = y'_n + \tfrac{1}{3}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),$$

hvor

$$\begin{aligned} k_1 &= \tfrac{1}{2}hf(x_n, y_n, y'_n), & k &= \tfrac{1}{2}h(y'_n + \tfrac{1}{2}k_1), \\ k_2 &= \tfrac{1}{2}hf(x_n + \tfrac{1}{2}h, y_n + k, y'_n + k_1), & & \\ k_3 &= \tfrac{1}{2}hf(x_n + \tfrac{1}{2}h, y_n + k, y'_n + k_2), & l &= h(y'_n + k_3) \end{aligned}$$

og

$$k_4 = \tfrac{1}{2}hf(x_n + h, y_n + l, y'_n + 2k_3).$$

Denne metode kaldes en Runge-Kutta-Nyström-metode.

2.7.1.2 $y''(x) = f(x, y(x))$

Betragt begyndelsesværdiproblemet

$$y''(x) = f(x, y(x)), \qquad \text{hvor} \qquad y(x_0) = y_0 \quad \text{og} \quad y'(x_0) = y'_0.$$

Lad $h > 0$ være en skridtlængde og sæt $x_n = x_0 + nh$ for $n = 0, 1, 2, \ldots$. Definér y_n og y'_n for $n = 0, 1, 2, \ldots$, rekursivt ved

$$\begin{aligned} k_1 &= \tfrac{1}{2}hf(x_n, y_n), \\ k_2 &= \tfrac{1}{2}hf(x_n + \tfrac{1}{2}h, y_n + \tfrac{1}{2}h(y'_n + \tfrac{1}{2}k_1)) = k_3, \\ k_4 &= \tfrac{1}{2}hf(x_n + h, y_n + h(y'_n + k_2)), \\ y_{n+1} &= y_n + h(y'_n + \tfrac{1}{3}(k_1 + 2k_2)) \end{aligned}$$

og

$$y'_{n+1} = y'_n + \tfrac{1}{3}(k_1 + 4k_2 + k_4).$$

Denne metode kaldes en Runge-Kutta-Nyström-metode.

2.8 Numerisk metode til Laplace- og Poisson-ligningerne i to dimensioner

Lad $h > 0$ være en skridtlængde og lad $x_i = x_0 + ih$ og $y_j = y_0 + jh$ for alle $i, j \in \mathbb{Z}$, hvor x_0 og y_0 evt. er 0. Så udgør mængden af punkter på formen (x_i, y_j) et gitter. Antag, at den todimensionelle Laplace-ligning

$$\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} = 0$$

eller den todimensionelle Poisson-ligning

$$\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} = f(x, y),$$

har løsningen $u(x, y)$ for $(x, y) \in D$, hvor D er en tilpas pæn delmængde af $\mathbb{R}^2$. Hvis vi for de (i, j), hvor $(x_i, y_j) \in D$, kan finde $u_{i,j}$, så $u(x_i, y_j) \approx u_{i,j}$, så kalder vi mængden af disse $u_{i,j}$'er for en numerisk løsning til Laplace- eller Poisson-ligningen.

2.8.1 Regulær rand

Kald randen af D for ∂D. Antag, at vi for et passende valg af x_0, y_0 og $h > 0$ har, at ethvert punkt $(x_i, y_j) \in D$ enten er et randpunkt, $(x_i, y_j) \in \partial D$, eller at de fire nabopunkter, (x_{i-1}, y_j), (x_{i+1}, y_j), (x_i, y_{j-1}) og (x_i, y_{j-1}), også ligger i D, og at h er lille. Så kan vi finde en numerisk løsning til Laplace-ligningen, som opfylder følgende lineære ligningssystem:

$$u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j} = 0, \quad \text{for} \quad (i,j) \text{ så } (x_i, y_j) \in D \setminus \partial D, \tag{20}$$

mens der for Poisson-ligningen tilsvarende findes en numerisk løsning, som opfylder følgende lineære ligningsystem:

$$u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j} = h^2 f(x_i,y_j), \quad \text{for} \quad (i,j) \text{ så } (x_i, y_j) \in D \setminus \partial D. \tag{21}$$

Bemærk i øvrigt, at (20) svarer til (21) med $f \equiv 0$.

2.8.1.1 Dirichlet-randbetingelser

Hvis vi har Dirichlet-randbetingelser, dvs. hvis u's værdi er angivet på randen, så mangler vi blot at sætte

$$u_{i,j} = u(x_i, y_j) \quad \text{for} \quad (i,j) \text{ så } (x_i, y_j) \in \partial D, \tag{22}$$

hvorefter vi kan løse ligningssystemet bestående af ligningerne i (20) eller (21) samt (22).

2.8.1.2 Neumann- og blandede randbetingelser

Antag nu, at vi har Neumann-randbetingelser på (dele af) randen, dvs. vi kender

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x_i, y_j) = n_1 \frac{\partial u}{\partial x} + n_2 \frac{\partial u}{\partial y}$$

i stedet for $u(x_i, y_j)$ for visse (i,j) så $(x_i, y_j) \in \partial D$, hvor $n = \left(\begin{smallmatrix} n_1 \\ n_2 \end{smallmatrix} \right)$ er en ydre normalvektor til D. I de punkter (x_i, y_j), hvor vi har Neumann-randbetingelser, erstattes (22) så af

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x_i, y_j) = n_1 \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h} + n_2 \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2h} \tag{23}$$

og, hvis der er tale om en Laplace-ligning,

$$u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j} = 0, \tag{24}$$

eller

$$u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j} = h^2 f(x_i, y_j), \tag{25}$$

hvis der er tale om en Poisson-ligning. Bemærk, at visse af disse værdier svarer til punkter udenfor D. Hvis D er tilpas pæn, vil (23) og (24) eller (25), hvor der er Neumann-randbetingelser i punktet (x_i, y_j), og (22), hvor der er Dirichlet-randbetingelser i punktet (x_i, y_j), sammen med (20) eller (21), hvor $(x_i, y_j) \in D \setminus \partial D$, give et ligningssystem med en entydig løsning.

2.8.2 Irregulær rand

Hvis ikke det gælder, at ethvert punkt $(x_i, y_j) \in D$ enten er et randpunkt, $(x_i, y_j) \in \partial D$, eller at de fire nabopunkter, (x_{i-1}, y_j), (x_{i+1}, y_j), (x_i, y_{j-1}) og (x_i, y_{j-1}), også ligger i D, så skal ovenstående metoder modificeres.

2.8.2.1 Dirichlet-randbetingelser

Antag, at $(x_i, y_j) \in D$ ikke er et randpunkt, og at et eller flere af nabopunkterne (x_{i-1}, y_j), (x_{i+1}, y_j), (x_i, y_{j-1}) og (x_i, y_{j-1}) ligger udenfor D.

- Hvis (x_{i+1}, y_j) ligger i D, lader vi $a = 1$, $x_A = x_{i+1}$ og sætter $u_A = u_{i+1,j}$. Ellers vælges a, $0 < a < 1$, så $(x_A, y_j) \in \partial D$, hvor $x_A = x_i + ah$, og vi sætter $u_A = u(x_A, y_j)$.
- Hvis (x_i, y_{j+1}) ligger i D, lader vi $b = 1$, $y_B = y_{j+1}$ og sætter $u_B = u_{i,j+1}$. Ellers vælges b, $0 < b < 1$, så $(x_i, y_B) \in \partial D$, hvor $y_B = y_j + bh$, og vi sætter $u_B = (x_i, y_B)$.
- Hvis (x_{i-1}, y_j) ligger i D, lader vi $p = 1$, $x_P = x_{i-1}$ og sætter $u_P = u_{i-1,j}$. Ellers vælges p, $0 < p < 1$, så $(x_P, y_j) \in \partial D$, hvor $x_P = x_i - ph$, og vi sætter $u_P = u(x_P, y_j)$.
- Hvis (x_i, y_{j-1}) ligger i D, lader vi $q = 1$, $y_Q = y_{j-1}$ og sætter $u_Q = u_{i,j-1}$. Ellers vælges q, $0 < q < 1$, så $(x_i, y_Q) \in \partial D$, hvor $y_Q = y_j - qh$, og vi sætter $u_Q = u(x_i, y_Q)$.

Så kan vi finde en numerisk løsning, som opfylder følgende ligning:

$$\frac{u_A}{a(a+p)} + \frac{u_B}{b(b+q)} + \frac{u_P}{p(p+a)} + \frac{u_Q}{q(q+b)} - \frac{ap+bq}{abpq} u_{i,j} = 0, \tag{26}$$

hvis der er tale om Laplace-ligningen, og

$$\frac{u_A}{a(a+p)} + \frac{u_B}{b(b+q)} + \frac{u_P}{p(p+a)} + \frac{u_Q}{q(q+b)} - \frac{ap+bq}{abpq} u_{i,j} = \frac{h^2}{2} f(x_i, y_j), \tag{27}$$

hvis der er tale om Poisson-ligningen. For alle (i, j), hvor (x_i, y_j) ikke er et randpunkt, og et eller flere af nabopunkterne (x_{i-1}, y_j), (x_{i+1}, y_j), (x_i, y_{j-1}) og (x_i, y_{j-1}) ligger udenfor D, opstilles nu enten ligning (26) eller (27), og for alle (i, j), hvor (x_i, y_j) ikke er randpunkter, og (x_{i-1}, y_j), (x_{i+1}, y_j), (x_i, y_{j-1}) og (x_i, y_{j-1}) ligger indenfor D, opstilles (20) eller (21). Sammen med (22) fås så et lineært ligningssystem med en entydig løsning.

2.8.3 Gauss-Seidel-iterationsmetoden

De ovenstående løsninger kræver alle, at man løser et lineært ligningssystem (der er lige mange ligninger og ubekendte; N ligninger med N ubekendte). Skriv det lineære ligningssystem på formen $Ax = b$, hvor $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^{N}$ er en $N \times N$-matrix, x er en vektor bestående af de ukendte værdier, og $b = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_N \end{pmatrix}$ er en kendt vektor. Gauss-Seidel-iterationsmetoden går ud på at finde en numerisk løsning til ligningssystemet $Ax = b$ ved hjælp af følgende iterative metode.

1. Først gættes på en løsning, som kaldes $x^{(0)}$ og n sættes til 0.
2. Herefter findes $x^{(n)} = \begin{pmatrix} x_1^{(n+1)} & x_2^{(n+1)} & \dots & x_N^{(n+1)} \end{pmatrix}$ på følgende vis:
   - Først sættes $x_1^{(n+1)} = \frac{1}{a_{1,1}}(b_1 - \sum_{j=2}^{N} a_{1,j} x_j^{(n)})$.

- Dernæst $x_2^{(n+1)} = \frac{1}{a_{2,2}}(b_2 - \sum_{j=1}^{1} a_{2,j}x_j^{(n+1)} - \sum_{j=3}^{N} a_{2,j}x_j^{(n)})$.
- Og såfremdeles $x_i^{(n+1)} = \frac{1}{a_{i,i}}(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j}x_j^{(n+1)} - \sum_{j=i+1}^{N} a_{i,j}x_j^{(n)})$ for $i = 3, \ldots, N-1$.
- Og til sidst $x_N^{(n+1)} = \frac{1}{a_{N,N}}(b_N - \sum_{j=1}^{N-1} a_{N,j}x_j^{(n+1)})$.

3. Nu erstattes n med $n+1$ og processen gentages fra trin 2.

I mange tilfælde (eksempelvis hvis A er såkaldt *symmetrisk positiv-definit* eller *diagonaldominant*), så vil følgen $x^{(n)}$ gå mod den entydige løsning til ligningssystemet $Ax = b$. I praksis stopper man processen, når $x^{(n+1)}$ næsten ikke afviger fra $x^{(n)}$.