Opgave 1 (MGR) (25 POINT)

(a) Find uden brug af computer den generelle løsning y_h til den homogene ODE $y''+4y'+8y=0$.

(b) Find vha. de ubestemte koefficienters metode en partikulær løsning y_p til den ikke-homogene ODE

$$y''(x)+4y'(x)+8y(x)=-12e^{-2x}\sin(4x). \tag{1}$$

(c) Find den generelle løsning y_g til (1). Du må gerne benytte betegnelserne y_h og y_p fra delspørgsmål (a) og (b) uden at have løst disse.

(d) Løs begyndelsesværdiproblemet givet ved (1) samt $y(\frac{3\pi}{4})=-e^{-\frac{3\pi}{2}}$ og $y'(\frac{3\pi}{4})=0$ og kald løsningen y_0.

(e) Lad funktionen f være givet ved $f(x)=\sin(2x)(1+\cos(2x))+\cos(2x)(1+\sin(2x))$. Vis, at funktionen g givet ved $g(x)=e^{-2x}f(x)$ løser begyndelsesværdiproblemet fra delspørgsmål (d).

(f) Find alle x som løser ligningen $e^{2x}y_0(x)-f(x)=0$.

(g) Lad den 2π-periodiske funktion g være givet ved $g(x)=e^{2x}y_0(x)$. Find følgende tre af g's Fourier-koefficienter: $a_0(g)$, $a_4(g)$ og $b_4(g)$.

Opgave 2 (MGR) (25 POINT)

Den endimensionelle varmeligning skrives ofte på formen $u_t=c^2u_{xx}$, hvor kvadratet på c sikrer, at tallet er positivt. I denne opgave vil vi se på konstantens rolle. Lad derfor $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ være begyndelsestemperaturprofilen for en uendeligt lang stang, og $u\colon\mathbb{R}\times[0,\infty)\to\mathbb{R}$ være løsningen til

$$u_t=c^2u_{xx}, \qquad u(x,0)=f(x) \tag{2}$$

(a) Lad $j\colon\mathbb{R}\times[0,\infty)\to\mathbb{R}$ være givet ved $j(x,t)=u(ax,t)$, hvor u er en løsning til (2). Find a, så j løser $j_t=j_{xx}$, når du ved, at u løser (2). Vink: Benyt kædereglen.

(b) Lad $k\colon\mathbb{R}\times[0,\infty)\to\mathbb{R}$ være givet ved $k(x,t)=u(x,bt)$. Find på samme måde $b>0$, så k løser $k_t=k_{xx}$.

(c) Lad $l\colon\mathbb{R}\times[0,\infty)\to\mathbb{R}$ være givet ved $l(x,t)=u(ax,bt)$. Vis, at $l_t=l_{xx}$ hvis og kun hvis $c^2=\frac{a^2}{b}$.

(d) Hvordan skal $f_{a,b}$ defineres, hvis $c^2=\frac{a^2}{b}$ og vi ønsker, at $l(x,0)=f_{a,b}(x)$? (Funktionen $f_{a,b}$ ønskes udtrykt vha. f.)

(e) Hvorfor kan vi ikke vælge a og b, så $l\colon\mathbb{R}\times[0,\infty)\to\mathbb{R}$ løser $l_t=-l_{xx}$?

(f) Definér w ved $w(x,t)=u(x,-t)$. For hvilke værdier af x og t er w defineret?

(g) Hvilken differentialligning er w en løsning til?

Opgave 3 (MGR) (10 POINT)

Betragt begyndelsesværdiproblemet $y'(x) = \sin(x+y(x))$, $y(-1) = 0$. Vi ønsker at finde numeriske løsninger med skridtlængde $h = 0.4$.

(a) Lad $x_0 = -1$, $y_0 = 0$ og $x_n = x_0+nh$. Brug RK4-metoden til at finde y_1. Angiv også værdierne af k_1, k_2, k_3 og k_4.

(b) Det oplyses, at $y_{10} = y_{10}^{\text{RK4}(0.4)} = -0.361251257$ og at med skridtlængden $h = 0.8$ giver RK4 værdierne $y_5^{\text{RK4}(0.8)} = -0.3691997$, $y_{10}^{\text{RK4}(0.8)} = -2.7175125$ og $y_{20}^{\text{RK4}(0.8)} = -10.446256$. Hvordan kan du estimere fejlen på $y_{10}^{\text{RK4}(0.4)}$?

(c) Givet nedenstående skema skal du udregne Adams-Moulton-korrektoren y_5. Den benyttede formel med de benyttede tal indsat skal fremgå af besvarelsen.

n	RK4	Adams-Bashforth-prædiktor	Adams-Moulton-korrektor
2	-0.6385644		
3	-0.9203547		
4	-1.1604798	-1.1614648	-1.1604843
5	-1.3358723	-1.3375816	y_5
6	-1.4083012	$\tilde{y}_6$	

(d) Estimér fejlen på resultatet i delspørgsmål (c). Har du ikke besvaret (c), så skriv i stedet den relevante formel op.