Opgave 1 (MGR) (25 POINT)

(a) Find uden brug af computer den generelle løsning y_h til den homogene ODE $y'' + 49y = 0$.

(b) Find vha. de ubestemte koefficienters metode en partikulær løsning y_p til den ikke-homogene ODE

$$y''(x) + 49y(x) = 24.5 + 67.5\cos(2x) \tag{1}$$

(c) Find den generelle løsning y_g til (1). Du må gerne benytte betegnelserne y_h og y_p fra delspørgsmål (a) og (b) uden at have løst disse.

(d) Løs begyndelsesværdiproblemet givet ved (1) samt $y(\frac{3\pi}{2}) = y'(\frac{3\pi}{2}) = 0$ og kald løsningen y_0.

(e) Lad funktionen f være givet ved $f(x) = \cos(2x) + \sin(7x) + \cos^2(x)$. Vis, at f løser begyndelsesværdiproblemet fra delspørgsmål (d).

(f) Bemærk, at f er 2π-periodisk. Lad $a_0(f)$, $a_n(f)$ og $b_n(f)$, $n \in \mathbb{N}$ betegne f's Fourier-koefficienter. Find $b_4(f)$, $a_2(f)$ og $a_7(f)$. Begrund dit svar.

(g) Find alle x som løser ligningen $f(x) = y_0(x)$.

Opgave 2 (MGR) (25 POINT)

En stang, som er fuldstændigt termisk isoleret bortset fra i enderne, hvor den er forbundet med et kuldereservoir på 0 grader og med en oprindeligt positiv temperaturprofil $f(x) \geq 0$, vil med tiden nærme sig en konstant temperatur på 0 grader. Afhængig af begyndelsestemperaturprofilen kan temperaturen dog godt stige lokalt undervejs. I denne opgave betragtes et eksempel på dette.

(a) Lad $f(x) = a\sin(\pi x) + b\sin(3\pi x)$, hvor a og b er konstanter. Løs den endimensionelle varmeligning givet ved

$$u_t = u_{xx}, \quad u(0,t) = 0 = u(1,t), \quad u(x,0) = f(x)$$

(b) Lad $a = 9$, $b = 1$ og vis, at $u_t(x, 0) \leq 0$ for alle $x \in [0, 1]$. Det må benyttes uden bevis, at $\sin(\pi x) + \sin(3\pi x) \geq 0$ for $x \in [0, 1]$.

(c) Skriv med ord, hvad det betyder, at $u_t(x, 0) \leq 0$ for $x \in [0, 1]$.

(d) Lad $a = 9$, $b = -1$ og find to punkter x_1 og x_2, så $u_t(x_1, 0) > 0$ og $u_t(x_2, 0) < 0$.

(e) Skriv med ord, hvad det betyder, at $u_t(x_1, 0) > 0$.

(f) Til hvilken tid $t = t_0$ er $u_t(\frac{5}{6}, t) = 0$? Det kan benyttes, at $\sin(\frac{5\pi}{6}) = \frac{1}{2}$ og at $\sin(2\pi + \frac{\pi}{2}) = \sin(\frac{\pi}{2}) = 1$.

(g) Skriv med ord, hvad det betyder, at $u_t(\frac{5}{6}, t_0) = 0$.

Opgave 3 (MGR) (10 POINT)

Betragt begyndelsesværdiproblemet $y'(x) = \sin(x - y(x))$, $y(0) = 1$. Vi ønsker at finde numeriske løsninger med skridtlængde $h = 0.8$.

(a) Lad $x_0 = 0$, $y_0 = 1$ og $x_n = x_0 + nh$. Brug RK4-metoden til at finde y_1. Angiv også værdierne af k_1, k_2, k_3 og k_4.

(b) Det oplyses, at med skridtlængden $h = 0.4$ giver RK4 værdierne $y_5 = 1.25168267$, $y_{10} = 2.8869162$ og $y_{20} = 6.66921218$. Hvis du ved, at RK4 giver $y_{10} = 6.66941032$, kan du estimere fejlen på én af disse tre værdier. Hvilken og hvordan?

(c) Givet nedenstående skema skal du udregne Adams-Moulton-korrektoren y_5. Den benyttede formel med de benyttede tal indsat skal fremgå af besvarelsen.

n	RK4	Adams-Bashforth-prædiktor	Adams-Moulton-korrektor
2	1.00396300		
3	1.54192934		
4	2.18789368	2.18157243	2.18573722
5	2.88762279	2.92147696	y_5
6	3.61747797	$\tilde{y}_6$	

(d) Estimér fejlen på resultatet i delspørgsmål (c). Har du ikke besvaret (c), så skriv i stedet den relevante formel op.