Opgave 1 (25 POINT)

(a) Find uden brug af computer den generelle løsning y_h til den homogene ODE $y'' - 2y' + y = 0$.

(b) Find vha. enten de arbitrære parametres variationsmetode eller de ubestemte koefficienters metode en partikulær løsning y_p til den ikke-homogene ODE

$$y''(x) - 2y'(x) + y(x) = 2e^x + 6xe^x. \tag{1}$$

(c) Find den generelle løsning y_g til (1). Du må gerne benytte betegnelserne y_h og y_p fra delspørgsmål (a) og (b) uden at have løst disse.

(d) Løs begyndelsesværdiproblemet givet ved (1) samt $y(0) = 1$ og $y'(0) = 2$ og kald løsningen y_0.

(e) Lad funktionen f være givet ved $f(x) = y_0(x)e^{-x}$. Vis, at f løser begyndelsesværdiproblemet

$$f''(x) = 2 + 6x, \quad f(0) = 1, \quad f'(0) = 1. \tag{2}$$

(Dette kan også vises uden at have fundet y_0.)

(f) Løs begyndelsesværdiproblemet (2).

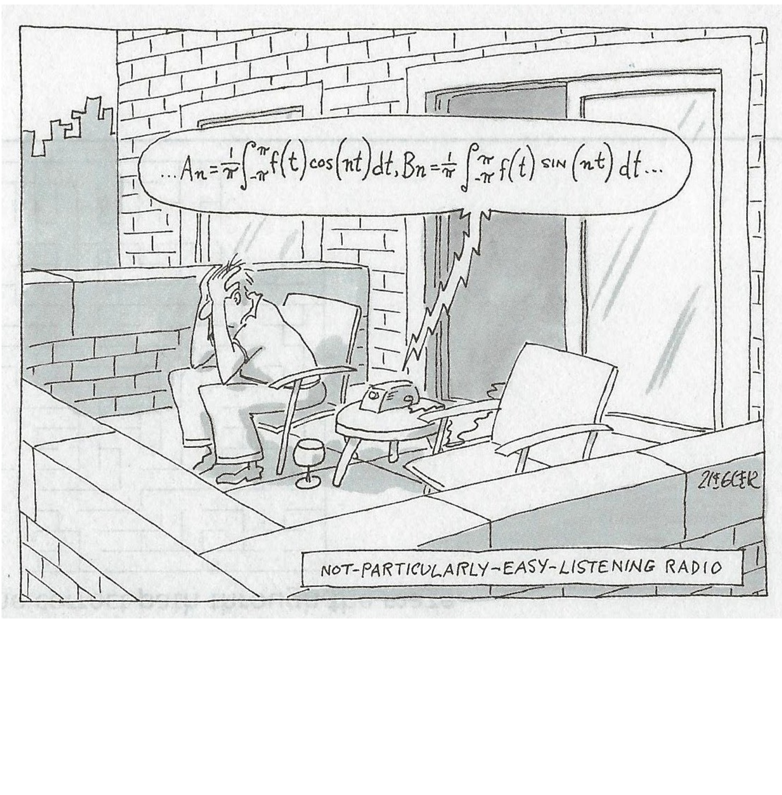
(g) Lad den 2π-periodiske funktion g være givet ved $g(x) = g(x + 2\pi)$ og

$$g(x) = f(x) \quad \text{for} \quad x \in [-\pi, \pi].$$

Det kan vises, at Fourier-koefficienterne for g er

$$\begin{aligned}
a_0(g) &= 1 + \frac{\pi^2}{3} \\
a_n(g) &= (-1)^n \frac{4}{n^2} && \text{for} \quad n \in \mathbb{N} \\
b_n(g) &= (-1)^n \frac{12 - 2n^2(1+\pi^2)}{n^3}. && \text{for} \quad n \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

Find alle Fourier-koefficienter for funktionen h givet ved $h(x) = g(x) - \cos(2x)$.



Opgave 2 (25 POINT)

Vi betragter en fuldstændig termisk isoleret og fuldstændig homogen, tynd stang af længde 1.

(a) Opskriv en endimensionel differentialligning (uden bibetingelser), som beskriver varmeudviklingen i stangen.

(b) Lad $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ være begyndelsestemperaturprofilen for stangen. Opskriv begyndelsesbetingelsen for systemet beskrevet ved differentialligningen fra spørgsmål (a).

(c) Opskriv randbetingelser, som svarer til ingen varmestrømning gennem endepunkterne.

(d) Find egenværdier og egenfunktioner for systemet.

(e) Opskriv den formelle løsning til systemet som en uendelig sum af egenfunktioner ganget med konstanter.

(f) Opskriv formler for konstanterne fra løsningsformlen som funktioner af f.

(g) Lad $f(x) = u_0$ for alle $x \in [0,1]$. Find løsningen $u(x,t)$ for dette valg af f.

(h) Lad funktionen f_w være givet ved

$$f_w(x) = \begin{cases} \frac{u_1}{w} & \text{for } 0 \le x \le w \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

Find $\lim_{t\to\infty} u(x,t)$, hvor u er løsningen for $f = f_w$, $0 < w < 1$. Det er ikke nødvendigt at finde den formelle løsning først.

Opgave 3 (25 POINT)

Betragt begyndelsesværdiproblemet $y'(x) = \cos(x - y(x))$, $y(-1) = -2$. Vi ønsker at finde numeriske løsninger med skridtlængde $h = 0.5$.

(a) Lad $x_0 = -1$, $y_0 = -2$ og $x_n = x_0 + nh$. Brug RK4-metoden til at finde y_1. Angiv også værdierne af k_1, k_2, k_3 og k_4.

(b) Det oplyses, at $y_8 = -2.4187167$, $y_9 = -2.0658801$ og $y_{11} = -1.2508105$. Brug disse tre værdier til et estimere $y(4)$ vha. polynomiumsapproksimation.

(c) Find y_{10} vha. RK4. Angiv også k_1, k_2, k_3 og k_4.

(d) Det oplyses, at med skridtlængden $h = 0.25$ giver RK4 værdierne $y_5 = -1.8396493$, $y_{20} = -1.6719216$ og med skridtlængden $h = 1.0$ giver RK4 værdierne $y_5 = -1.6660306$ og $y_{20} = 12.8269762$. Ved hjælp af én af disse fire værdier kan du estimere fejlen på svaret fra delspørgsmål (c). Hvilken og hvordan?

(e) Givet nedenstående skema skal du udregne Adams-Moulton-korrektoren y_5. Den benyttede formel med de benyttede tal indsat skal fremgå af besvarelsen.

n	RK4	Adams-Bashforth-prædiktor	Adams-Moulton-korrektor
2	-1.7551610		
3	-2.0020964		
4	-2.4757353	-2.5831226	-2.4643407
5	-2.8198650	-2.7581849	y_5
6	-2.8669736	$\tilde{y}_6$	

(f) Estimér fejlen på resultatet i delspørgsmål (e). Har du ikke besvaret (e), så skriv i stedet den relevante formel op.

(g) Find Adams-Bashforth-prædiktoren $\tilde{y}_6$. Den benyttede formel med de benyttede tal indsat skal fremgå af besvarelsen.

(h) Givet nedenstående skema skal du udregne Adams-Bashforth-prædiktoren $\tilde{y}_{10}$ samt Adams-Moulton-korrektoren y_{10}. De benyttede formler med de benyttede tal indsat skal fremgå af besvarelsen.

n	RK4	Adams-Bashforth-prædiktor	Adams-Moulton-korrektor
6	-2.8669736	$\tilde{y}_6$	-2.9103344
7	-2.7929053	-2.8209248	-2.7073788
8	-2.4187167	-2.5058393	-2.4137247
9	-2.0658801	-2.0388529	-2.0657885

Opgave 4 (25 POINT)

I denne opgave vil vi løse begyndelsesværdiproblemet

$$y''(t) = 2y'(t) - y(t) + (e-1)e^{t+1}t^{e-2}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0 \tag{3}$$

vha. Laplace-transformationen.

(a) Lad funktionen f være givet ved $f(t) = t^{e-2}$. Find Laplace-transformationen $\mathcal{L}(f)$ af f.

(b) Lad g være funktionen givet ved $g(t) = e^t$. Brug resultatet fra delspørgsmål (a) til at finde $\mathcal{L}(gf)$.

(c) Lad h være funktionen givet ved $h(t) = (e-1)e^{t+1}t^{e-2}$. Find $\mathcal{L}(h)$. Vink: husk, at $e^{t+1} = e \cdot e^t$.

(d) Lad y være en ukendt funktion som opfylder at $y(0) = 0$ og $y'(0) = 0$, og kald dens Laplace-transformation $Y = \mathcal{L}(y)$. Udtryk $\mathcal{L}(y')$ og $\mathcal{L}(y'')$ vha. Y.

(e) Omskriv begyndelsesværdiproblemet (3) til en algebraisk ligning for Laplace-transformationen Y af den ukendte funktion y.

(f) Find et udtryk for Y ved at løse ligningen fra delspørgsmål (e). Det kan her benyttes, at $\Gamma(a) \cdot a = \Gamma(a+1)$ for $a \geq 1$.

(g) Find $\mathcal{L}^{-1}(s \mapsto \frac{\Gamma(a)}{s^a})$ for $a \geq 1$.

(h) Brug resultaterne fra delspørgsmål (f) og (g) sammen med s-forskydning til at løse begyndelsesværdiproblemet (3). Har du ikke løst (f) og/eller (g), bedes du i stedet finde den inverse Laplace-transformation $\mathcal{L}^{-1}(s \mapsto Y(s-b))$ som funktion af y, hvor $Y = \mathcal{L}(y)$.