

Opgave 1 (25 POINT)

- (a) Find uden brug af computer den generelle løsning y_h til den homogene ODE $y'' + 4y' + 8y = 0$.
- (b) Find vha. de ubestemte koefficienters metode en partikulær løsning y_p til den ikke-homogene ODE
- $$y''(x) + 4y'(x) + 8y(x) = -12e^{-2x} \sin(4x). \quad (1)$$
- (c) Find den generelle løsning y_g til (1). Du må gerne benytte betegnelserne y_h og y_p fra delspørgsmål (a) og (b) uden at have løst disse.
- (d) Løs begyndelsesværdiproblemet givet ved (1) samt $y(\frac{3\pi}{4}) = -e^{-\frac{3\pi}{2}}$ og $y'(\frac{3\pi}{4}) = 0$ og kald løsningen y_0 .
- (e) Lad funktionen f være givet ved $f(x) = \sin(2x)(1 + \cos(2x)) + \cos(2x)(1 + \sin(2x))$. Vis, at funktionen g givet ved $g(x) = e^{-2x}f(x)$ løser begyndelsesværdiproblemet fra delspørgsmål (d).
- (f) Find alle x som løser ligningen $e^{2x}y_0(x) - f(x) = 0$.
- (g) Lad den 2π -periodiske funktion g være givet ved $g(x) = e^{2x}y_0(x)$. Find følgende tre af g 's Fourier-koefficienter: $a_0(g)$, $a_4(g)$ og $b_4(g)$.

Opgave 2 (25 POINT)

Den endimensionelle varmeligning skrives ofte på formen $u_t = c^2 u_{xx}$, hvor kvadratet på c sikrer, at tallet er positivt. I denne opgave vil vi se på konstantens rolle. Lad derfor $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ være begyndelsestemperaturprofilen for en uendeligt lang stang, og $u: \mathbb{R} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ være løsningen til

$$u_t = c^2 u_{xx}, \quad u(x, 0) = f(x) \quad (2)$$

- (a) Lad $j: \mathbb{R} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ være givet ved $j(x, t) = u(ax, t)$, hvor u er en løsning til (2). Find a , så j løser $j_t = j_{xx}$, når du ved, at u løser (2). Vink: Benyt kædereglene.
- (b) Lad $k: \mathbb{R} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ være givet ved $k(x, t) = u(x, bt)$. Find på samme måde $b > 0$, så k løser $k_t = k_{xx}$.
- (c) Lad $l: \mathbb{R} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ være givet ved $l(x, t) = u(ax, bt)$. Vis, at $l_t = l_{xx}$ hvis og kun hvis $c^2 = \frac{a^2}{b}$.
- (d) Hvordan skal $f_{a,b}$ defineres, hvis $c^2 = \frac{a^2}{b}$ og vi ønsker, at $l(x, 0) = f_{a,b}(x)$? (Funktionen $f_{a,b}$ ønskes udtrykt vha. f .)
- (e) Hvorfor kan vi ikke vælge a og b , så $l: \mathbb{R} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ løser $l_t = -l_{xx}$?
- (f) Definér w ved $w(x, t) = u(x, -t)$. For hvilke værdier af x og t er w defineret?
- (g) Hvilken differentialligning er w en løsning til?

Opgave 3 (25 POINT)

Betragt begyndelsesværdiproblemet $y'(x) = \sin(x+y(x))$, $y(-1) = 0$. Vi ønsker at finde numeriske løsninger med skridtlængde $h = 0.4$.

- (a) Lad $x_0 = -1$, $y_0 = 0$ og $x_n = x_0 + nh$. Brug RK4-metoden til at finde y_1 . Angiv også værdierne af k_1, k_2, k_3 og k_4 .
- (b) Det oplyses, at $y_7 = -1.3223951$, $y_9 = -0.6510173$ og $y_{13} = -0.5060688$. Brug disse tre værdier til at estimere $y(3)$ vha. polynomiumsapproximation.
- (c) Find y_{10} vha. RK4. Angiv også k_1, k_2, k_3 og k_4 .
- (d) Det oplyses, at med skridtlængden $h = 0.8$ giver RK4 værdierne $y_5 = -0.3691997$, $y_{10} = -2.7175125$ og $y_{20} = -10.446256$. Hvordan kan du estimere fejlen på svaret i delspørgsmål (c)?
- (e) Givet nedenstående skema skal du udregne Adams-Moulton-korrektoren y_5 . Den benyttede formel med de benyttede tal indsat skal fremgå af besvarelsen.

n	RK4	Adams-Bashforth-prædiktør	Adams-Moulton-korrektor
2	-0.6385644		
3	-0.9203547		
4	-1.1604798	-1.1614648	-1.1604843
5	-1.3358723	-1.3375816	y_5
6	-1.4083012	\tilde{y}_6	

- (f) Estimér fejlen på resultatet i delspørgsmål (e). Har du ikke besvaret (e), så skriv i stedet den relevante formel op.
- (g) Find Adams-Bashforth-prædiktøren \tilde{y}_6 . Den benyttede formel med de benyttede tal indsat skal fremgå af besvarelsen.
- (h) Givet nedenstående skema skal du udregne Adams-Bashforth-prædiktøren \tilde{y}_{10} samt Adams-Moulton-korrektoren y_{10} . De benyttede formler med de benyttede tal indsat skal fremgå af besvarelsen.

n	RK4	Adams-Bashforth-prædiktør	Adams-Moulton-korrektor
6	-1.40830123	\tilde{y}_6	-1.4085998
7	-1.3223951	-1.3212017	-1.3236056
8	-1.0404247	-1.0183278	-1.0443804
9	-0.6510173	-0.6123805	-0.6558173

Opgave 4 (25 POINT)

- (a) Vis, at for $n \neq 0$ er

$$f(x) = -\frac{x^{1-n}}{(n-1)^2} - \frac{x^{1-n} \log(x)}{n-1}$$

en løsning til differentialligningen $y'(x) = \frac{\log(x)}{x^n}$.

(b) Betragt den ikke-homogene, lineære differentialligning af anden orden

$$xy''(x) - 3y'(x) + 3x^{-1}y(x) = x^{-1}\log(x). \quad (3)$$

Find den tilhørende homogene differentialligning.

- (c) Omskriv den homogene differentialligning til en kendt form og find to lineært uafhængige løsninger. Beskriv, hvad du gør.
- (d) Find Wronski-determinanten (hvis du ikke har løst ovenstående opgave, kan du bruge $y_1(x) = x^{m_1}$ og $y_2(x) = x^{m_2}$).
- (e) Omskriv (3) til standardform.
- (f) Find en partikulær løsning til (3) eksempelvis vha. de arbitrære koefficienters variationsmetode. Vink: integralerne kan løses ved at bruge resultatet i delspørgsmål (a).
- (g) Find den generelle løsning til (3).
- (h) Løs begyndelsesværdiproblemet givet ved (3) og $y(e) = 1, y'(e) = \frac{5}{9e}$.