Opgave 1 (25 POINT)

(a) Find uden brug af computer den generelle løsning y_h til den homogene ODE $y'' + 49y = 0$.

(b) Find vha. de ubestemte koefficienters metode en partikulær løsning y_p til den ikke-homogene ODE

$$y''(x) + 49y(x) = 24.5 + 67.5\cos(2x) \tag{1}$$

(c) Find den generelle løsning y_g til (1). Du må gerne benytte betegnelserne y_h og y_p fra delspørgsmål (a) og (b) uden at have løst disse.

(d) Løs begyndelsesværdiproblemet givet ved (1) samt $y(\frac{3\pi}{2}) = y'(\frac{3\pi}{2}) = 0$ og kald løsningen y_0.

(e) Lad funktionen f være givet ved $f(x) = \cos(2x) + \sin(7x) + \cos^2(x)$. Vis, at f løser begyndelsesværdiproblemet fra delspørgsmål (d).

(f) Bemærk, at f er 2π-periodisk. Lad $a_0(f)$, $a_n(f)$ og $b_n(f)$, $n \in \mathbb{N}$ betegne f's Fourier-koefficienter. Find $b_4(f)$, $a_2(f)$ og $a_7(f)$. Begrund dit svar.

(g) Find alle x som løser ligningen $f(x) = y_0(x)$.

Opgave 2 (25 POINT)

En stang, som er fuldstændigt termisk isoleret bortset fra i enderne, hvor den er forbundet med et kuldereservoir på 0 grader og med en oprindeligt positiv temperaturprofil $f(x) \geq 0$, vil med tiden nærme sig en konstant temperatur på 0 grader. Afhængig af begyndelsestemperaturprofilen kan temperaturen dog godt stige lokalt undervejs. I denne opgave betragtes et eksempel på dette.

(a) Lad $f(x) = a\sin(\pi x) + b\sin(3\pi x)$, hvor a og b er konstanter. Løs den endimensionelle varmeligning givet ved

$$u_t = u_{xx}, \quad u(0,t) = 0 = u(1,t), \quad u(x,0) = f(x)$$

(b) Lad $a = 9$, $b = 1$ og vis, at $u_t(x,0) \leq 0$ for alle $x \in [0,1]$. Det må benyttes uden bevis, at $\sin(\pi x) + \sin(3\pi x) \geq 0$ for $x \in [0,1]$.

(c) Skriv med ord, hvad det betyder, at $u_t(x,0) \leq 0$ for $x \in [0,1]$.

(d) Lad $a = 9$, $b = -1$ og find to punkter x_1 og x_2, så $u_t(x_1,0) > 0$ og $u_t(x_2,0) < 0$.

(e) Skriv med ord, hvad det betyder, at $u_t(x_1,0) > 0$.

(f) Til hvilken tid $t = t_0$ er $u_t(\frac{5}{6},t) = 0$? Det kan benyttes, at $\sin(\frac{5\pi}{6}) = \frac{1}{2}$ og at $\sin(2\pi + \frac{\pi}{2}) = \sin(\frac{\pi}{2}) = 1$.

(g) Skriv med ord, hvad det betyder, at $u_t(\frac{5}{6},t_0) = 0$.

Opgave 3 (25 POINT)

Betragt begyndelsesværdiproblemet $y'(x) = \sin(x - y(x))$, $y(0) = 1$. Vi ønsker at finde numeriske løsninger med skridtlængde $h = 0.8$.

(a) Lad $x_0 = 0$, $y_0 = 1$ og $x_n = x_0 + nh$. Brug RK4-metoden til at finde y_1. Angiv også værdierne af k_1, k_2, k_3 og k_4.

(b) Det oplyses, at $y_6 = 3.61747797$, $y_9 = 5.89479339$ og $y_{12} = 8.2308224$. Brug disse tre værdier til et estimere $y(8)$ vha. polynomiumsapproksimation.

(c) Find y_{10} vha. RK4. Angiv også k_1, k_2, k_3 og k_4.

(d) Det oplyses, at med skridtlængden $h = 0.4$ giver RK4 værdierne $y_5 = 1.25168267$, $y_{10} = 2.8869162$ og $y_{20} = 6.66921218$. Ved hjælp af svaret fra delspørgsmål (c) kan du estimere fejlen på én af disse tre værdier. Hvilken og hvordan?

(e) Givet nedenstående skema skal du udregne Adams-Moulton-korrektoren y_5. Den benyttede formel med de benyttede tal indsat skal fremgå af besvarelsen.

n	RK4	Adams-Bashforth-prædiktor	Adams-Moulton-korrektor
2	1.00396300		
3	1.54192934		
4	2.18789368	2.18157243	2.18573722
5	2.88762279	2.92147696	y_5
6	3.61747797	$\tilde{y}_6$	

(f) Estimér fejlen på resultatet i delspørgsmål (e). Har du ikke besvaret (e), så skriv i stedet den relevante formel op.

(g) Find Adams-Bashforth-prædiktoren $\tilde{y}_6$. Den benyttede formel med de benyttede tal indsat skal fremgå af besvarelsen.

(h) Givet nedenstående skema skal du udregne Adams-Bashforth-prædiktoren $\tilde{y}_{10}$ samt Adams-Moulton-korrektoren y_{10}. De benyttede formler med de benyttede tal indsat skal fremgå af besvarelsen.

n	RK4	Adams-Bashforth-prædiktor	Adams-Moulton-korrektor
6	3.61747797	$\tilde{y}_6$	3.61091556
7	4.36577316	4.36275994	4.36045380
8	5.12613074	5.12413228	5.12172866
9	5.89479339	5.89202997	5.89118328

Opgave 4 (25 POINT)

I denne opgave vil vi løse begyndelsesværdiproblemet

$$y'(x) = \frac{xy(x)}{x^2+1}\left(\frac{1}{2}\log(x^2+1) - \log(y(x)) + 1\right), \quad y(0) = e. \tag{2}$$

(a) Omskriv differentialligningen i (2) til formen

$$M_1(x, y(x)) + N_1(x, y(x))y'(x) = 0, \tag{3}$$

hvor $N_1(x, y) = \frac{x^2+1}{y}$.

(b) Undersøg, om differentialigningen på formen (3) er eksakt.

(c) Omskriv differentialligningen i (2) til formen

$$M_2(x, y(x)) + N_2(x, y(x))y'(x) = 0, \tag{4}$$

hvor $N_2(x, y) = \frac{1}{y}$.

(d) Undersøg, om differentialigningen på formen (4) er eksakt.

(e) Undersøg, om der findes en integrerende faktor for differentialligningen på formen (3) eller (4) (efter eget valg), som kun afhænger af x.

(f) Find en integrerende faktor. Vink til at finde stamfunktioner: prøv at udregne $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \log(x^2 + 1)$.

(g) Find en funktion u, så

$$u(x, y(x)) = c, \tag{5}$$

hvor c er en konstant, hvis y er en løsning til differentialligningen i (2). Vink: til at finde integraler kan det benyttes, at

$$\frac{\partial \int M(x, x_2)\,\mathrm{d}x}{\partial x_2} = \int \frac{\partial M}{\partial x_2}(x, x_2)\,\mathrm{d}x,$$

samt at

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt{x^2+1} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

og

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(\sqrt{x^2+1}\big(\log(x^2+1) - 2\big)\Big) = \frac{x\log(x^2+1)}{\sqrt{x^2+1}}.$$

(h) Bestem konstanten c fra delspørgsmål (g) ved at indsætte begyndelsesværdibetingelsen i (5) og find et udtryk for funktionen y ved at isolere $y(x)$ i $u(x, y(x)) = c$.