Opgave 1 (40 POINT)

(a) De to mest oplagte svar er med hhv. $f(x) = 2x$ og $g(y) = y^{-2}$, eller $f(x) = x$ og $g(y) = \frac{1}{2y^2}$, altså eksempelvis $y^{-2}(x)y'(x) = 2x$. Se også afsnit 1.1.1 i Metoder og Eksempler for denne og de næste to delspørgsmål.

(b) Vi antager $f(x) = 2x$ og $g(y) = y^{-2}$ (andre løsninger til (a) er ikke væsensforskellige). Så er $F(x) = x^2$ og $G(y) = -y^{-1}$, og dermed er $-y^{-1} = G(y) = F(x)+k = x^2+k$, så $y_1(x) = \frac{1}{-k-x^2}$.

(c) Hvis $y_1(0) = \frac{1}{-k-x^2} = 1$, så må $k = -1$ og altså $y_1(x) = \frac{1}{1-x^2}$.

(d) Tjek ved at indsætte i ligningen.

(e) Tjek ved at indsætte i ligningen.

(f) Det er klart, at $y_1(x) = \frac{1}{1-x^2} \neq \frac{1}{1-x} = y_2(x)$ (indsæt eksempelvis $x = -\frac{1}{2}$ i de to funktionsudtryk: $y_1(-\frac{1}{2}) = \frac{4}{3} \neq \frac{2}{3} = y_2(-\frac{1}{2})$). Svaret er derfor oplagt *nej*. Når spørgsmålet i det hele taget stilles, så skyldes det, at vi jo har eksistens- og entydighedsresultater (se afsnit 1.2.1.1 i Metoder), men disse kræver som bekendt kendskab til $y(x_0)$ *samt* $y'(x_0)$!

(g) Ligningen, der her skal findes en løsning til, er den tilhørende *homogene* ODE, og to de løsninger y_1 og y_2 til den inhomogene ODE kan altså bruges til at finde en løsning her, eksempelvis $y_3 = y_1 - y_2$ (se afsnit 1.2.2.1 i Metoder).[1]

(h) Der er to oplagte løsninger til dette delspørgsmål: Enten findes y_4 vha. reduktion af orden (med y_3 som “input” – se afsnit 1.2.1.2 i Metoder), eller også noteres det, at der ikke indgår noget y, der ikke er differentieret, i ligningen, hvorfor $y_4(x) = c$, hvor c er en konstant, er en løsning. Sidstnævnte kræver dog lidt snuhed, da man rent faktisk skal tænke selvstændigt.

(i) Vi ved, at y_3 og y_4 er lineært uafhængige løsninger til det homogene problem. Altså må enhver løsning være på formen $y_h = c_1y_1 + c_2y_2$ (se afsnit 1.2.1.1 i Metoder).

(j) Da y_h er den fuldstændige løsning til den homogene, fås den fuldstændige løsning til den inhomogene ved at lægge en (og *kun én*) partikulær løsning til y_h, eksempelvis y_1 eller y_2, altså eksempelvis $y_g = y_h + y_1$ (afsnit 1.2.2.1 i Metoder).

(k) Man kan selvfølgelig bare bestemme konstanterne c_1 og c_2 ovenfor, så y_g opfylder begyndelsesværdiproblemet. For ikke at gøre udregningerne for komplicerede, har jeg dog valgt at give jer løsningen direkte: y_2 opfylder kravet (se også afsnit 1.2.1.1 og 1.2.2.1 i Metoder).

(l) Svaret er selvfølgelig *nej* (eksistens og entydighed – se igen afsnit 1.2.1.1 og 1.2.2.1 i Metoder).

[1] Nogle har været så frække at skrive $y_3 = 0$, hvilket selvfølgelig er korrekt, da jeg strengt taget ikke har krævet $y_3 \neq 0$. Det har således givet points i denne delopgave, men gjort (h) noget sværere at løse.

Opgave 2 (20 POINT)

I denne opgave skal du løse begyndelsesværdiproblemet

$$y'''(t) - \tfrac{107}{27}y(t) = 198e^{-\frac{t}{3}}\sin(2t), \quad y(0) = 27, \quad y'(0) = -9, \quad y''(0) = -105$$

vha. Laplace-transformationen.

(a) $F(s) = \frac{1}{1-(-\frac{1}{3})}$ og $G(s) = \frac{2}{s^2+2^2}$ (Metoder afsnit 1.3.1).

(b) *Nej.* Laplace-transformationen er lineær og kan håndtere summer og skaleringer, men ikke produkter! (Man kan i stedet bruge s-forskydning, Metoder afsnit 1.3.3).

(c) Her bruges linearitet (se afsnit 1.3.2 i Metoder) samt tabelopslag (se afsnit 1.3.1 i Metoder): $I(s) = 198 \cdot \frac{2}{(s-(-\frac{1}{3}))^2+2^2}$.

(d) $s^3Y(s) - 27s^2 - (-9)s - (-105) - \frac{107}{27}Y(s) = 198 \cdot \frac{2}{(s-(-\frac{1}{3}))^2+2^2}$ (Metoder afsnit 1.3.4 samt linearitet, afsnit 1.3.2) og dermed

$$Y(s) = \frac{198 \cdot \frac{2}{(s-(-\frac{1}{3}))^2+2^2} - (-27s^2 - (-9)s - (-105))}{s^3 - \frac{107}{27}}.$$

(e) $e^{-\frac{t}{3}}\cos(2t)$ (Metoder afsnit 1.3.1).

(f) Den er sværere. Enten anvender man $\mathcal{L}^{-1}$ på Y, eller også gætter man sig frem. I begge tilfælde fås $y(t) = 27e^{-\frac{t}{3}}\cos(2t)$.

Opgave 3 (20 POINT)

(a) Det burde være klart for enhver, at f er periodisk med fundamentalperiode 2π.

(b) At f er ulige kan ses på flere måder: man kan se på grafen, man kan se, at $e^{\cos(x)}$ er lige og $\sin(x)$ og dermed $\sin(\sin(x))$ er ulige, og dermed er f ulige, eller man kan bemærke, at f's Fourierrække, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\sin(nx)$ er en ren sinusrække. Da f er ulige, kan den ikke også være lige (kun 0-funktionen er både lige og ulige: $f(-x) = f(x) = -f(x)$!)

(c) I dette spørgsmål havde der sneget sig en lille trykfejl ind, som vist kun blev bemærket af én: der står $u(x, y)$ hvor der skulle have stået $u(x, t)$. Beklager!

Det ses let, at Lad $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\cos(2nt)\sin(nx)$ er på formen i afsnit 1.6.1.1 i Metoder, hvor $c = 2$, $L = \pi$, $b_n^* = 0$ og $b_n = \frac{1}{n!}$. Alternativt kan man tjekke, at $\frac{1}{n!}\cos(2nt)\sin(nx)$ opfylder kravene for alle n og så tillade sig at tage den uendelige sum bagefter.

(d) Der er flere måder at angribe dette på: Enten konstateres det, at $u_t(x,0)=0$ og $g(x)$ dermed er 0 eller også konstateres det blot at $b_n^*=0$ for alle n medfører, at $g\equiv 0$.

(e) Enten konstateres, at $h(x)=u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\cos(2n\cdot 0)\sin(nx)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\sin(nx)=f(x)$, eller også konstateres det blot at $b_n=b_n(f)$, så $h=f$.

(f) Metoden afhænger en smule af, om man har løst ovenstående opgave. I begge tilfælde bruges, at hvis noget ligner en Fourierrække, så er det en Fourierrække. Hvis ovenstående opgave er løst: $h(x)=f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\sin(nx)$. Hvis ovenstående opgave ikke er løst: $h(x)=u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\cos(2n\cdot 0)\sin(nx)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\sin(nx)$.

Opgave 4 (20 POINT)

(a) Først bemærkes det, at den endelige sum $\sum_{n=0}^{4}\frac{1}{n!}=1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}=2{,}708\overline{333}$, så derfor er $\sum_{n=5}^{\infty}\frac{1}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}-\sum_{n=0}^{4}\frac{1}{n!}=e-2{,}708\overline{333}<0{,}01$. Da $|\sin(nx)|\leq 1$, kan vi derfor konstatere, at $\left|\sum_{n=5}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n!}\right|\leq\sum_{n=5}^{\infty}\frac{|\sin(nx)|}{n!}\leq\sum_{n=5}^{\infty}\frac{1}{n!}<0{,}01$. Denne opgave er ikke specielt nem, men de efterfølgende opgaver afhænger ikke af dens løsning.

(b) Da $f(\frac{\pi}{4})=f_4(\frac{\pi}{4})+\sum_{n=5}^{\infty}\frac{\sin(n\frac{\pi}{4})}{n!}$ og $\left|\sum_{n=5}^{\infty}\frac{\sin(n\frac{\pi}{4})}{n!}\right|<0{,}01$ er det nok at udregne $f_4(\frac{\pi}{4})$:

$$f_4(\tfrac{\pi}{4})=\frac{\sin(\frac{\pi}{4})}{1!}+\frac{\sin(\frac{2\pi}{4})}{2!}+\frac{\sin(\frac{3\pi}{4})}{3!}+\frac{\sin(\frac{4\pi}{4})}{4!}=\frac{7}{6\sqrt{2}}+\frac{1}{2}.$$

(c) Vi har, at $\left|\sum_{n=5}^{\infty}\frac{\sin(n\frac{\pi}{4})}{n!}\right|<0{,}01$, men denne fejl kan jo sagtens være negativ, da $\sin$ også tager negative værdier.

(d)

	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\exp(x)$
p_4	$x=0,\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4},\pi,\frac{1}{\sqrt{2}},1$	$x=0,\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4},\pi$	$x=0,\frac{1}{\sqrt{2}},1$
q_4	$x=0,\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4},\pi,\frac{6\pi}{4},2\pi$		

Her er det for overskuelighedens skyld benyttet, at $\cos(\frac{\pi}{2})=\sin(0)=0$, $\cos(\frac{\pi}{4})=\sin(\frac{\pi}{4})=\frac{1}{\sqrt{2}}$ og $\cos(0)=\sin(\frac{\pi}{2})=1$.

(e) Man kunne eksempelvis bruge RK4 (eller Eulers metode, eller…).

(f) Først findes $h=\frac{1-0}{1}$ og $x_0=0$, $x_1=1$. Nu er

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\approx J_1^S=\frac{1}{6}(e^{\cos(0)}\sin(\sin(0))+e^{\cos(1)}\sin(\sin(1)))+\frac{2}{3}e^{\cos(\frac{1}{2})}\sin(\sin(\tfrac{1}{2}))\approx 0{,}9529.$$