Opgave 1 (40 POINT)

I denne opgave antager vi, at $-1 < x < 1$.

(a) Omskriv ODE'en

$$\frac{y'(x)}{x} - 2y^2(x) = 0 \tag{1}$$

til separeret form.

(b) Løs ODE'en (1).

(c) Løs begyndelsesværdiproblemet givet ved (1) og $y(0) = 1$ og kald løsningen y_1.

(d) Vis, at løsningen y_1 fra delspørgsmål (c) også er en løsning til

$$y''(x) + \frac{2x^3 + 6x}{x^4 - 1} y'(x) = -\frac{2}{x^4 - 1}. \tag{2}$$

(e) Vis, at også $y_2(x) = \frac{1}{1-x}$ er en løsning til (2).

(f) Bemærk, at $y_1(0) = y_2(0) = 1$. Kan du ud fra dette og ovenstående konkludere, at $y_2 = y_1$? Begrund dit svar.

(g) Find en løsning y_3 til

$$y''(x) + \frac{2x^3 + 6x}{x^4 - 1} y'(x) = 0. \tag{3}$$

Hvis det er muligt, må du gerne benytte y_1 og/eller y_2 i udtrykket for y_3, også selvom du ikke har løst delopgave (c).

(h) Find en løsning y_4 til (3), som er lineært uafhængig af y_3. Det er nok at finde en formel for løsningen, det er tilladt at benytte y_1, y_2 og/eller y_3 i udtrykket, også selvom du ikke har fundet disse, og eventuelle integraler behøves ikke udregnet.

(i) Find den fuldstændige løsning y_h til (3). Det er tilladt at benytte y_1, y_2, y_3 og/eller y_4 i udtrykket, også selvom du ikke har fundet disse.

(j) Find den fuldstændige løsning y_g til (2). Det er tilladt at benytte y_1, y_2, y_3, y_4 og/eller y_h i udtrykket, også selvom du ikke har fundet disse.

(k) Find en løsning y_p til (2), som opfylder, at $y_p(0) = 1$ og $y_p'(0) = 1$.

(l) Kan du finde andre løsninger $\tilde{y}_p$ til (2), som opfylder $\tilde{y}_p(0) = 1$ og $\tilde{y}_p'(0) = 1$? Begrund dit svar.

Opgave 2 (20 POINT)

I denne opgave skal du løse begyndelsesværdiproblemet

$$y'''(t) - \tfrac{107}{27}y(t) = 198e^{-\frac{t}{3}}\sin(2t), \quad y(0) = 27, \quad y'(0) = -9, \quad y''(0) = -105$$

vha. Laplace-transformationen.

(a) Find Laplace-transformationerne $F = \mathcal{L}(f)$ og $G = \mathcal{L}(g)$ af hhv. $f(t) = e^{-\frac{t}{3}}$ og $g(t) = \sin(2t)$.

(b) Lad $H = \mathcal{L}(h)$ betegne Laplace-transformationen af $h(t) = e^{-\frac{t}{3}}\sin(2t)$. Kan man udregne H ved at udregne produktet FG?

(c) Udregn Laplace-transformationen $I = \mathcal{L}(i)$ af $i(t) = 198e^{-\frac{t}{3}}\sin(2t)$.

(d) Find en ligning for $Y = \mathcal{L}(y)$, hvor y er løsningen til ovenstående begyndelsesværdiproblem og isolér Y i udtrykket. Vink: Husk, at $\mathcal{L}(y''')(s) = s^3Y(s) - s^2y(0) - sy'(0) - y''(0)$.

(e) Find den inverse Laplace-tranformation $\mathcal{L}^{-1}(J)$ af $J(s) = \frac{s+\frac{1}{3}}{(s+\frac{1}{3})^2+2^2}$.

(f) Find løsningen til begyndelsesværdiproblemet.

Opgave 3 (20 POINT)

Lad $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være givet ved $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n!}$, som også kan skrives $f(x) = e^{\cos(x)}\sin(\sin(x))$.[1]

(a) Er f periodisk? Hvis ja, så find fundamentalperioden for f, altså f's korteste, positive periode.

(b) Er f lige, ulige, begge dele eller ingen af delene? Begrund dit svar.

(c) Lad $u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\cos(2nt)\sin(nx)$. Gør rede for, at u løser den endimensionelle bølgeligning $u_{tt} = c^2u_{xx}$ på $(x, t) \in [0, \pi] \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ med randbetingelsen $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$ for et passende $c > 0$ og bestem c.

(d) Find g, så u opfylder begyndelsesværdibetingelsen $u_t(x, 0) = g(x)$.

(e) Find h, så u opfylder begyndelsesværdibetingelsen $u(x, 0) = h(x)$.

(f) Find Fourierrækken for h.

[1] Du skal ikke bekymre dig om, hvorfor $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n!} = e^{\cos(x)}\sin(\sin(x))$, men kan blot bruge det.

Opgave 4 (20 POINT)

Betragt $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ givet ved $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n!}$ som i Opgave 3.

(a) Det kan vises, at $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e \approx 2{,}71828$. Argumentér for, at $\left|\sum_{n=5}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n!}\right| < 0{,}01$, uanset hvad x er. Vink: Se på $\left|e - \sum_{n=0}^{4} \frac{1}{n!}\right|$ og husk, at $0! = 1$, at $\sin(0 \cdot x) = 0$ og at $|\sin(x)| \leq 1$.

(b) Lad $f_4(x) = \sum_{n=1}^{4} \frac{\sin(nx)}{n!}$. Jf. delopgave (a) begår vi kun en lille fejl ved at bruge f_4 fremfor f. Brug dette samt identiteterne $\sin(\frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{3\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$ og $\sin(\pi) = 0$ til – uden brug af lommeregner – at finde en sum af (maksimalt[2]) fire tal, som approksimerer $f(\frac{\pi}{4})$ med en fejl, der er mindre end $0{,}01$.

(c) Det viser sig, at summen fra delopgave (b) er *større* end $f(\frac{\pi}{4})$, faktisk omkring $0{,}0074$ for stor. Forklar, hvorfor $f_4(x)$ kan være større end $f(x)$ for visse værdier af x.

For overskuelighedens skyld vil vi i det følgende regne på $f_2(x) = \sum_{n=1}^{2} \frac{\sin(nx)}{n!} = \sin(x) + \frac{\sin(2x)}{2}$, selvom det betyder, at vi risikerer fejl med en absolutværdi på op til $e - 2{,}5 \approx 0{,}22$.

(d) Lad p_4 betegne et femtegradspolynomium, som stemmer overens med f i $x = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$, $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{3\pi}{4}$ og $x = \pi$, og lad q_4 betegne et femtegradspolynomium, som stemmer overens med f_2 i de samme punkter. Husk, at $f(x)$ også kan skrives $f(x) = e^{\cos(x)} \sin(\sin(x))$. Hvilke værdier af $\sin$, $\cos$ og $\exp$ skal vi kende for at udregne p_4, og hvilke værdier af $\sin$ skal vi kende for at udregne q_4? Besvarelsen af denne delopgave kan evt. være i tabelform.

Ovenstående delopgaver har handlet om at approksimere f's funktionsværdier på forskellig vis.

(e) Det kan vises, at f er en løsning til differentialligningen $y'(x) = e^{\cos(x)} \cos(x + \sin(x))$, og det ses let, at $f(0) = 0$. Forklar med ord, hvordan også dette kan bruges til at approksimere f.

(f) Estimér $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ vha. Simpsons regel med $n = 1$. Det er tilladt at benytte computer og/eller lommeregner i udregningen.

[2] Summen kan nemt reduceres til blot to led