Opgave 1 (MGR) (40 POINT)

(a) De to mest oplagte svar er med hhv. $f(x) = 2x$ og $g(y) = y^{-2}$, eller $f(x) = x$ og $g(y) = \frac{1}{2y^2}$, altså eksempelvis $y^{-2}(x)y'(x) = 2x$. Se også afsnit 1.1.1 i Metoder og Eksempler for denne og de næste to delspørgsmål.

(b) Vi antager $f(x) = 2x$ og $g(y) = y^{-2}$ (andre løsninger til (a) er ikke væsensforskellige). Så er $F(x) = x^2$ og $G(y) = -y^{-1}$, og dermed er $-y^{-1} = G(y) = F(x) + k = x^2 + k$, så $y_1(x) = \frac{1}{-k-x^2}$.

(c) Hvis $y_1(0) = \frac{1}{-k-x^2} = 1$, så må $k = -1$ og altså $y_1(x) = \frac{1}{1-x^2}$.

(d) Tjek ved at indsætte i ligningen.

(e) Tjek ved at indsætte i ligningen.

(f) Det er klart, at $y_1(x) = \frac{1}{1-x^2} \neq \frac{1}{1-x} = y_2(x)$ (indsæt eksempelvis $x = -\frac{1}{2}$ i de to funktionsudtryk: $y_1(-\frac{1}{2}) = \frac{4}{3} \neq \frac{2}{3} = y_2(-\frac{1}{2})$). Svaret er derfor oplagt *nej*. Når spørgsmålet i det hele taget stilles, så skyldes det, at vi jo har eksistens- og entydighedsresultater (se afsnit 1.2.1.1 i Metoder), men disse kræver som bekendt kendskab til $y(x_0)$ *samt* $y'(x_0)$!

(g) Ligningen, der her skal findes en løsning til, er den tilhørende *homogene* ODE, og to de løsninger y_1 og y_2 til den inhomogene ODE kan altså bruges til at finde en løsning her, eksempelvis $y_3 = y_1 - y_2$ (se afsnit 1.2.2.1 i Metoder).[1]

(h) Der er to oplagte løsninger til dette delspørgsmål: Enten findes y_4 vha. reduktion af orden (med y_3 som "input" – se afsnit 1.2.1.2 i Metoder), eller også noteres det, at der ikke indgår noget y, der ikke er differentieret, i ligningen, hvorfor $y_4(x) = c$, hvor c er en konstant, er en løsning. Sidstnævnte kræver dog lidt snuhed, da man rent faktisk skal tænke selvstændigt.

(i) Vi ved, at y_3 og y_4 er lineært uafhængige løsninger til det homogene problem. Altså må enhver løsning være på formen $y_h = c_1y_1 + c_2y_2$ (se afsnit 1.2.1.1 i Metoder).

(j) Da y_h er den fuldstændige løsning til den homogene, fås den fuldstændige løsning til den inhomogene ved at lægge en (og *kun én*) partikulær løsning til y_h, eksempelvis y_1 eller y_2, altså eksempelvis $y_g = y_h + y_1$ (afsnit 1.2.2.1 i Metoder).

(k) Man kan selvfølgelig bare bestemme konstanterne c_1 og c_2 ovenfor, så y_g opfylder begyndelsesværdiproblemet. For ikke at gøre udregningerne for komplicerede, har jeg dog valgt at give jer løsningen direkte: y_2 opfylder kravet (se også afsnit 1.2.1.1 og 1.2.2.1 i Metoder).

(l) Svaret er selvfølgelig *nej* (eksistens og entydighed – se igen afsnit 1.2.1.1 og 1.2.2.1 i Metoder).

[1] Nogle har været så frække at skrive $y_3 = 0$, hvilket selvfølgelig er korrekt, da jeg strengt taget ikke har krævet $y_3 \neq 0$. Det har således givet points i denne delopgave, men gjort (h) noget sværere at løse.

Opgave 2 (MGR) (20 POINT)

(a) Det burde være klart for enhver, at f er periodisk med fundamentalperiode 2π.

(b) At f er ulige kan ses på flere måder: man kan se på grafen, man kan se, at $e^{\cos(x)}$ er lige og $\sin(x)$ og dermed $\sin(\sin(x))$ er ulige, og dermed er f ulige, eller man kan bemærke, at f's Fourierrække, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \sin(nx)$ er en ren sinusrække. Da f er ulige, kan den ikke også være lige (kun 0-funktionen er både lige og ulige: $f(-x) = f(x) = -f(x)$!)

(c) Hvis noget ligner en Fourierrække, så er det en Fourierrække: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \sin(nx)$.

(d) I dette spørgsmål havde der sneget sig en lille trykfejl ind, som vist kun blev bemærket af én: der står $u(x, y)$ hvor der skulle have stået $u(x, t)$. Beklager!

Det ses let, at Lad $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \cos(2nt) \sin(nx)$ er på formen i afsnit 1.6.1.1 i Metoder, hvor $c = 2$, $L = \pi$, $b_n^* = 0$ og $b_n = \frac{1}{n!}$. Alternativt kan man tjekke, at $\frac{1}{n!} \cos(2nt) \sin(nx)$ opfylder kravene for alle n og så tillade sig at tage den uendelige sum bagefter.

(e) Der er flere måder at angribe dette på: Enten konstateres det, at $u_t(x, 0) = 0$ og $g(x)$ dermed er 0, samt at $h(x) = u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \cos(2n \cdot 0) \sin(nx) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \sin(nx) = f(x)$, eller også konstateres det blot at $b_n^* = 0$ for alle n medfører, at $g \equiv 0$, og at $b_n = b_n(f)$, så $h = f$.

(f) Man kunne eksempelvis bruge RK4 (eller Eulers metode, eller…).