Opgave 1 (MGR) (40 POINT)

I denne opgave antager vi, at $-1 < x < 1$.

(a) Omskriv ODE'en

$$\frac{y'(x)}{x} - 2y^2(x) = 0 \tag{1}$$

til separeret form.

(b) Løs ODE'en (1).

(c) Løs begyndelsesværdiproblemet givet ved (1) og $y(0) = 1$ og kald løsningen y_1.

(d) Vis, at løsningen y_1 fra delspørgsmål (c) også er en løsning til

$$y''(x) + \frac{2x^3 + 6x}{x^4 - 1} y'(x) = -\frac{2}{x^4 - 1}. \tag{2}$$

(e) Vis, at også $y_2(x) = \frac{1}{1-x}$ er en løsning til (2).

(f) Bemærk, at $y_1(0) = y_2(0) = 1$. Kan du ud fra dette og ovenstående konkludere, at $y_2 = y_1$? Begrund dit svar.

(g) Find en løsning y_3 til

$$y''(x) + \frac{2x^3 + 6x}{x^4 - 1} y'(x) = 0. \tag{3}$$

Hvis det er muligt, må du gerne benytte y_1 og/eller y_2 i udtrykket for y_3, også selvom du ikke har løst delopgave (c).

(h) Find en løsning y_4 til (3), som er lineært uafhængig af y_3. Det er nok at finde en formel for løsningen, det er tilladt at benytte y_1, y_2 og/eller y_3 i udtrykket, også selvom du ikke har fundet disse, og eventuelle integraler behøves ikke udregnet.

(i) Find den fuldstændige løsning y_h til (3). Det er tilladt at benytte y_1, y_2, y_3 og/eller y_4 i udtrykket, også selvom du ikke har fundet disse.

(j) Find den fuldstændige løsning y_g til (2). Det er tilladt at benytte y_1, y_2, y_3, y_4 og/eller y_h i udtrykket, også selvom du ikke har fundet disse.

(k) Find en løsning y_p til (2), som opfylder, at $y_p(0) = 1$ og $y_p'(0) = 1$.

(l) Kan du finde andre løsninger $\tilde{y}_p$ til (2), som opfylder $\tilde{y}_p(0) = 1$ og $\tilde{y}_p'(0) = 1$? Begrund dit svar.

Opgave 2 (MGR) (20 POINT)

Lad $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være givet ved $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n!}$, som også kan skrives $f(x) = e^{\cos(x)} \sin(\sin(x))$.[1]

(a) Er f periodisk? Hvis ja, så find fundamentalperioden for f, altså f's korteste, positive periode.

(b) Er f lige, ulige, begge dele eller ingen af delene? Begrund dit svar.

(c) Hvad er Fourierrækken for f?

(d) Lad $u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \cos(2nt) \sin(nx)$. Gør rede for, at u løser den endimensionelle bølgeligning $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ på $(x, t) \in [0, \pi] \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ med randbetingelsen $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$ for et passende $c > 0$ og bestem c.

(e) Find to funktioner g og h, så u opfylder er begyndelsesværdibetingelserne $u_t(x, 0) = g(x)$ og $u(x, 0) = h(x)$.

(f) Det kan vises, at f er en løsning til differentialligningen $y'(x) = e^{\cos(x)} \cos(x + \sin(x))$, og det ses let, at $f(0) = 0$. Forklar med ord, hvordan dette kan bruges til at finde en numerisk approksimation af f.

[1] Du skal ikke bekymre dig om, hvorfor $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n!} = e^{\cos(x)} \sin(\sin(x))$, men kan blot bruge det.