Opgave 1 (MGR) (25 POINT)

1. Find den generelle løsning til den homogene ODE $y'' + y = 0$.
2. Find den generelle løsning til den inhomogene ODE
$$y''(x) + y(x) = -2\cos(3x) \tag{1}$$
ved hjælp af de ubestemte koefficienters metode.
3. Løs begyndelsesværdiproblemet givet ved (1) og $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.
4. Vis, at $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ givet ved $f(x) = \cos^3(x)$ er en løsning til (1).
5. Brug entydighed af løsninger til at konkludere ud fra de to foregående punkter, at
$$\cos^3(x) = \tfrac{3}{4}\cos(x) + \tfrac{1}{4}\cos(3x). \tag{2}$$
6. Vis, at Fourierrækken for f,
$$f(x) = \cos^3(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx), \tag{3}$$
har koefficienterne $a_1 = \frac{3}{4}$, $a_3 = \frac{1}{4}$, $a_n = 0$ for $n \in \mathbb{N}_0 \setminus \{1,3\} = \{0,2,4,5,6,\dots\}$ og $b_n = 0$ for alle $n \geq 1$.

Opgave 2 (MGR) (25 POINT)

Betragt en kobberstang med en længde på én meter, $L = 100\,\text{cm}$. De fysiske data for kobber er som følger:

- massefylden er $\rho = 8.92\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$,
- den specifikke varmekapacitet er $\sigma = 0.092\,\frac{\text{cal}}{\text{g}\cdot{}^\circ\text{C}}$ og
- den termiske ledningsevne er $K = 0.95\,\frac{\text{cal}}{\text{cm}\cdot\text{s}\cdot{}^\circ\text{C}}$.

Vi antager, at stangen er helt uniform i længderetningen og tilpas tynd til, at vi kan betragte den som endimensionel.

Et eksperiment går ud på at stangen med en given temperaturfordeling bringes i total termisk isolation i et stykke tid, hvorefter den nye temperaturfordeling måles.

Lad $u(x,t)$, $0\,\text{cm} \leq x \leq 100\,\text{cm}$, $t \geq 0$ betegne stangens temperatur i et givet punkt x og til et givet tidspunkt t, hvor x angiver afstanden fra den ene ende af stangen, og t angiver tiden, der er gået siden eksperimentets begyndelse.

1. Opskriv en partiel differentialligning (og kun differentialligningen uden eventuelle betingelser), som beskriver temperaturudviklingen i kobberstangen. Eventuelt indgående kendte konstanter ønskes angivet med fire betydende cifre.

2. Det kan vises, at givet visse betingelser har den partielle differentialligning fra ovenstående punkt en entydig løsning. En type af disse betingelser kaldes en randbetingelse. Hvordan bør randbetingelserne se ud i situationen, hvor kobberstangen er i total termisk isolation?

3. Antag, at kobberstangen i udgangspunktet $t = 0$ har en temperaturfordeling givet ved $u(x, 0) = g(x)$, hvor
$$g(x) = 10\,^\circ\mathrm{C} + 5\cos^3\left(\frac{x\pi}{100\,\mathrm{cm}}\right)\,^\circ\mathrm{C}. \tag{4}$$
Hvad kaldes en betingelse af denne type?

4. Benyt resultatet fra sidste punkt i Opgave 1 til at finde Fourierrækken for g. Vink: Bemærk, at $g(x) = 10\,^\circ\mathrm{C} + 5\,^\circ\mathrm{C} \cdot f\left(\frac{x\pi}{100\,\mathrm{cm}}\right)$, hvor f er funktionen fra Opgave 1.

5. Benyt ovenstående resultat til at opskrive den unikke løsning til den partielle differentialligning fra det første punkt som opfylder betingelserne fra de efterfølgende punkter.

6. Hvilken temperaturfordeling forventer vi at måle, hvis eksperimentet afsluttes efter 3 min.? Resultatet skal angives som en funktion af x.

7. Hvilken temperaturfordeling forventer vi at måle, hvis vi venter meget lang tid? Igen ønskes resultatet angivet som en funktion af x.

Opgave 3 (MGR) (10 POINT)

Lad $R = [0,4] \times [0,5] \setminus \big([0,1] \times [0,1] \cup [3,4] \times [0,1] \cup [0,1] \times [3,5] \cup [3,4] \times [3,5]\big) \subset \mathbb{R}^2$ som vist i Figur 1(a), og lad linjestykkerne L_i, $i = 1, \ldots, 12$ være givet ved

$$\begin{array}{llll}
L_1 = \{1\} \times [0,1], & L_2 = [0,1] \times \{1\}, & L_3 = \{0\} \times [1,3], & L_4 = [0,1] \times \{3\}, \\
L_5 = \{1\} \times [3,5], & L_6 = [1,3] \times \{5\}, & L_7 = \{3\} \times [3,5], & L_8 = [3,4] \times \{3\}, \\
L_9 = \{4\} \times [1,3], & L_{10} = [3,4] \times \{1\}, & L_{11} = \{3\} \times [0,1], & L_{12} = [1,3] \times \{0\},
\end{array}$$

som ligeledes er illustreret i Figur 1(a).

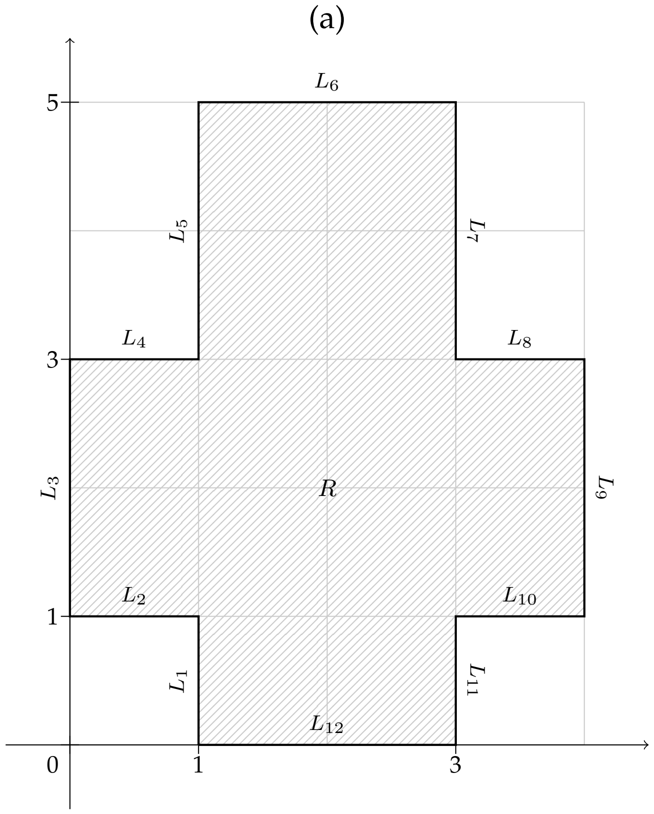
Betragt Poisson-ligningen

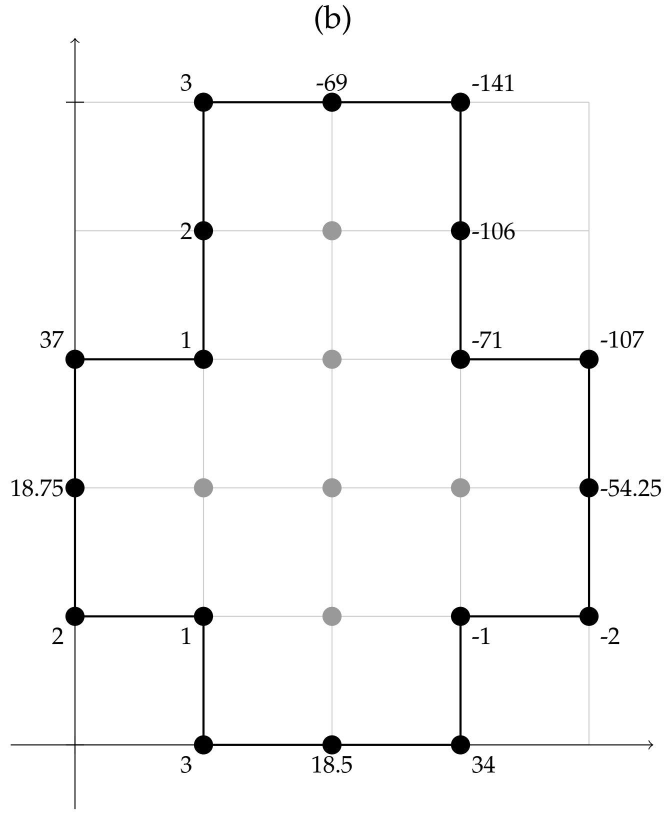
$$\Delta u(x,y) = u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = \tfrac{1}{4}(x-3)(y-4) \tag{5}$$

på R med Dirichlet-randbetingelser givet ved

$$\begin{array}{llllll}
u(x,y) = -\frac{1}{12}y^3 + y^2 - \frac{35}{12}y + 3 & \text{på} & L_1 \cup L_5, & & u(x,y) = 2 - x & \text{på} \quad L_2 \cup L_{10}, \\
u(x,y) = -\frac{1}{8}y^3 + \frac{3}{2}y^2 + \frac{105}{8}y - \frac{25}{2} & \text{på} & L_3, & & u(x,y) = 37 - 36x & \text{på} \quad L_4 \cup L_8, \\
u(x,y) = 75 - 72x & \text{på} & L_6, & & u(x,y) = 34 - 35y & \text{på} \quad L_7 \cup L_{11}, \\
u(x,y) = \frac{1}{24}y^3 - \frac{1}{2}y^2 - \frac{1225}{24}y + \frac{99}{2} & \text{på} & L_9 & \text{og} & u(x,y) = \frac{31}{2}x - \frac{25}{2} & \text{på} \quad L_{12}.
\end{array}$$

Betragt masken, som består af heltalspar (i,j), $i,j \in \mathbb{Z}$, hvor $\mathbb{Z}$ er mængden af hele tal. Vi kan benytte Dirichlet-randbetingelserne til at bestemme u's værdi i de maskepunkter, som flugter med randen af R. Disse værdier er angivet i Figur 1(b). Tilbage er 6 maskepunkter, som ligger i R, hvor vi ikke kender værdien af u. Vi ønsker at finde en numerisk løsning til Poisson-problemet i disse punkter, dvs. en approksimation $u_{ij} \approx u(i,j)$.





Figur 1: Regionen R og linjerne L_i, $i = 1, \ldots, 12$, samt maskepunkter med visse værdier angivet.

1. Benyt metoden, som baserer sig på at bruge den centrale andenordensdifferenskvotient for u_{xx} og u_{yy} med samme skridtlængde $h = 1$ i begge tilfælde, til at *opskrive* seks lineære ligninger i de seks ubekendte u_{ij}, hvor u_{ij} er approksimationer af $u(i, j)$.

I stedet for at løse de seks ligninger med seks ubekendte, vil vi forsøge at udnytte,

- at vi kender værdierne på L_1 og L_5 til at approksimere u_{12},
- at vi kender værdierne på L_2 og L_{10} til at approksimere u_{21},
- at vi kender værdierne på L_4 og L_8 til at approksimere u_{23} og
- at vi kender værdierne på L_7 og L_{11} til at approksimere u_{32}.

2. Antag, at $-\frac{1}{12}y^3 + y^2 - \frac{35}{12}y + 3$, som angiver værdierne på $L_1 \cup L_5$, også kan bruges til at approksimere værdien i punktet maskepunktet $(1, 2)$ og brug dette til at finde u_{12}.

På samme måde findes $u_{21} = 0$, $u_{23} = -35$, og $u_{32} = -36$. Vi mangler da blot at approksimere $u(2, 2)$ og $u(2, 4)$.

3. Find u_{22} og u_{24} vha. ligningerne, du opstillede i første punkt i denne opgave og de allerede kendte værdier for de andre u_{ij}'er.

4. Hvis u_{ij}'erne løser ligningssystemet, kan vi så være sikre på, at $u(i, j) = u_{ij}$?