

Opgave 1 (MGR) (25 POINT)

1. Find uden brug af computer den generelle løsning til den homogene ODE $y'' + ay' = 0$, hvor $a \neq 0$ er en ukendt konstant.
2. Det oplyses, at der findes en partikulær løsning til den inhomogene ODE

$$y''(x) + ay'(x) = 2 \cos(2x) + a \sin(2x) \quad (1)$$

som ikke afhænger af a . Find den generelle løsning til (1) ved hjælp af de ubestemte koefficienters metode. Vink: Da det er oplyst, at der eksisterer en løsning, som ikke afhænger af a , kan en partikulær løsning findes for en selvvalgt værdi af a . Det kan herefter undersøges, om den fundne løsning er en løsning for alle værdier af a .

3. Løs begyndelsesværdiproblemet givet ved (1) og $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.
4. Vis, at $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ givet ved $f(x) = \sin^2(x)$ er en løsning til (1). Det må her benyttes, at $\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$ og $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$.
5. Brug entydighed af løsninger til at konkludere ud fra de to foregående punkter, at

$$\sin^2(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2x). \quad (2)$$

6. Find Fourierkoefficienterne a_0 , a_n og b_n , $n \in \mathbb{N}$ i Fourierrækken for f ,

$$f(x) = \sin^2(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx), \quad (3)$$

ved hjælp af (2).

Opgave 2 (MGR) (15 POINT)

Betragt en streng på en elektrisk guitar med en længde på $L = 64.8$ cm, en masse pr. længdeenhed på $\rho = 0.00545 \frac{\text{kg}}{\text{m}}$ og en spænding (tension) på $T = 49.32$ N.

Vi antager, at stangen er helt uniform i længderetningen, tilpas tynd til, at vi kan betragte den som endimensionel, perfekt elastisk og frit bøjelig, at tyngdekraftens påvirkning af strengen kan negligeres og at strengen kun vibrerer vinkelret på strengens retning.

Et eksperiment går ud på at strengen bringes i en bestemt position, hvorefter den slippes.

Lad $u(x, t)$, $0 \text{ cm} \leq x \leq 64.8 \text{ cm}$, $t \geq 0$ betegne strengens udsving (vinkelret på strengens retning) i et givet punkt x og til et givet tidspunkt t , hvor x angiver afstanden fra den ene ende af strengen, og t angiver tiden, der er gået siden eksperimentets begyndelse.

1. Opskriv en partiel differentiaalligning (og kun differentiaalligningen uden eventuelle betingelser), som beskriver udviklingen i strengens udsving. Eventuelt indgående kendte konstanter ønskes angivet med fire betydende cifre. Det kan benyttes, at $\frac{\text{N}}{\frac{\text{kg}}{\text{m}}} = \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$.
2. Det kan vises, at givet visse betingelser har den partielle differentiaalligning fra ovenstående punkt en entydig løsning. En type af disse betingelser kaldes en randbetingelse. Hvordan bør randbetingelserne se ud i situationen, hvor guitarstrengen er spændt fast i en guitar?

3. Antag, at guitarstrengen i udgangspunktet $t = 0$ opfylder at $u(x, 0) = g(x)$ og $u_t(x, 0) \equiv 0$, hvor $g: [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ er en given funktion. Hvad kaldes en betingelse af denne type?
4. Strengen er guitarens dybe E-streng. En korrekt stemt dyb E-streng har grundfrekvensen 82.4 Hz. Hvis guitaren skal stemme, er spændingen T så rigtig, skal T øges, eller skal T mindskes? Begrund dit svar.

Opgave 3 (MGR) (20 POINT)

Lad $R = [0, 4] \times [0, 4] \setminus ([0, 1] \times [2, 4] \cup [3, 4] \times [2, 4]) \subset \mathbb{R}^2$ som vist i Figur 1(a), og lad linjestykkerne $L_i, i = 1, \dots, 8$ være givet ved

$$\begin{aligned} L_1 &= \{0\} \times [0, 2], & L_2 &= [0, 1] \times \{2\}, & L_3 &= \{1\} \times [2, 4], & L_4 &= [1, 3] \times \{4\}, \\ L_5 &= \{3\} \times [2, 4], & L_6 &= [3, 4] \times \{2\}, & L_7 &= \{4\} \times [0, 2], & L_8 &= [0, 4] \times \{0\}, \end{aligned}$$

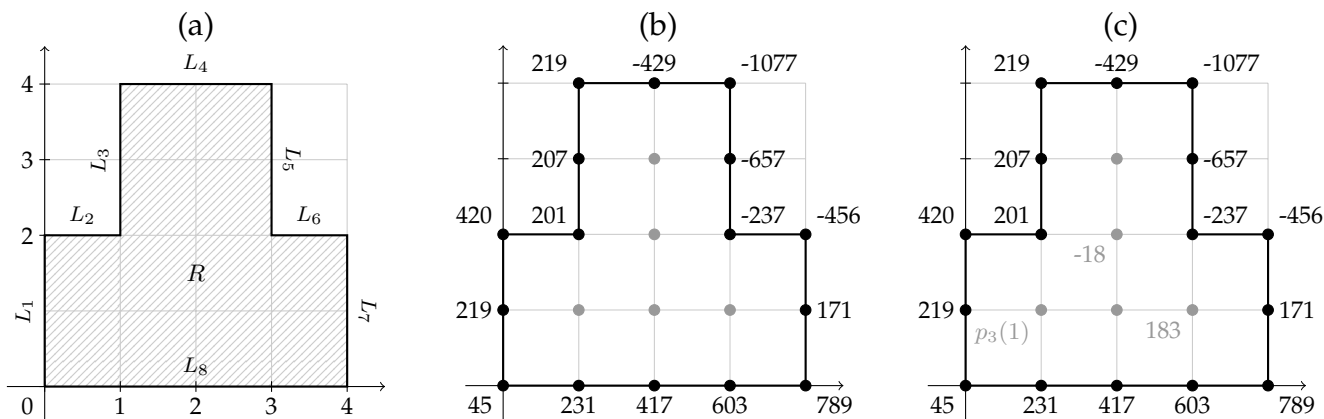
som ligeledes er illustreret i Figur 1(a).

Betragt Poisson-ligningen

$$\Delta u(x, y) = u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = 3xy - 12x - 9y + 36 \tag{4}$$

på R med Dirichlet-randbetingelser givet ved

$$\begin{aligned} u(x, y) &= -1.5y^3 + 18y^2 + 157.5y + 45 & \text{på } L_1, & & u(x, y) &= 420 - 219x & \text{på } L_2, \\ u(x, y) &= -y^3 + 12y^2 - 35y + 231 & \text{på } L_3, & & u(x, y) &= 867 - 648x & \text{på } L_4, \\ u(x, y) &= 603 - 420y & \text{på } L_5, & & u(x, y) &= 420 - 219x & \text{på } L_6, \\ u(x, y) &= 0.5y^3 - 6y^2 - 612.5y + 789 & \text{på } L_7 & \text{ og } & u(x, y) &= 186x + 45 & \text{på } L_8. \end{aligned}$$



Figur 1: (a): Regionen R og linjerne $L_i, i = 1, \dots, 8$. (b): Maskepunkter med visse værdier angivet. (c) Værdier i maskerandpunkter samt approksimationer af punkterne $u(1, 1)$, $u(2, 2)$ og $u(3, 1)$ angivet.

Betragt masken, som består af heltalspar $(i, j), i, j \in \mathbb{Z}$, hvor \mathbb{Z} er mængden af hele tal. Vi kan benytte Dirichlet-randbetingelserne til at bestemme u 's værdi i de maskepunkter, som flugter med randen af R . Disse værdier er angivet i Figur 1(b). Tilbage er de 5 med gråt markerede

maskepunkter, som ligger i R , hvor vi ikke kender værdien af u . Vi ønsker at finde en numerisk løsning til Poisson-problemet i disse punkter, dvs. en approksimation $u_{ij} \approx u(i, j)$.

1. Benyt metoden, som baserer sig på at bruge den centrale andenordensdifferenskvotient for u_{xx} og u_{yy} med samme skridtlængde $h = 1$ i både x - og y -retningen, til at *opskrive* fem lineære ligninger i de fem ubekendte u_{ij} , hvor u_{ij} er approksimationer af $u(i, j)$.

I stedet for at løse de fem ligninger med fem ubekendte, vil vi i første omgang forsøge at udnytte, at vi kender punkterne $u(1, 0)$, $u(1, 2)$, $u(1, 3)$ og $u(1, 4)$ til at approksimere $u(1, 1)$ vha. et interpolationspolynomium.

2. Find et interpolationspolynomium p_3 , som går gennem punkterne $(0, u(1, 0))$, $(2, u(1, 2))$, $(3, u(1, 3))$ og $(4, u(1, 4))$. Begrund eventuelt dit svar.
3. Evaluér interpolationspolynomiet p_3 fra foregående punkt i 1 og brug resultatet som approksimation af $u(1, 1)$: $u_{11} = p_3(1)$.

På samme måde som vi i de to ovenstående punkter fandt en approksimation u_{11} af $u(1, 1)$, kan man finde approksimationer u_{22} for $u(2, 2)$ og u_{31} for $u(3, 1)$ ved at udnytte, at vi kender $u(x, 2)$ for $x = 0, 1, 3, 4$ og $u(1, y)$ for $y = 0, 2, 3, 4$. Dette giver $u_{22} = -18$ og $u_{31} = 183$, som det også fremgår af Figur 1(c). Der er nu to punkter tilbage, som vi ingen approksimation har af.

4. Find u_{21} og u_{23} vha. ligningerne, du opstillede i første punkt i denne opgave og de allerede kendte værdier for de andre u_{ij} 'er.
5. Afgør, om de fundne approksimationer løser ligningssystemet fra første punkt.
6. Hvis u_{ij} 'erne løser ligningssystemet, kan vi så være sikre på, at $u(i, j) = u_{ij}$?