UTR/alp

AALBORG UNIVERSITET ESBJERG

Skriftlig eksamen i

Matematisk modellering og numeriske metoder
K5

Fredag den 4. januar 2013 kl. 09.00 – 13.00

Eksaminanden medbringer:	Alle hjælpemidler er tilladte med undtagelse af mobiltelefon og internetadgang.
	Eksaminanderne medbringer selv papir til kladde og renskrift.
Aflevering:	Opgave UTR 1-3 afleveres i pink omslag til Ulla Tradsborg. *Bedømmelsen afleveres på ternet papir.* *Beregninger kan eventuelt afleveres på USB-stik (der må kun være beregninger på USB-stik).*
	Opgave JHP 1-4 afleveres i grønt omslag eller USB-stik til Jørgen H. Pedersen
	Besvarelserne bedes forsynet med navn, cpr. og sidenummer. Hvis USB-stik anvendes, skrives nummeret på omslaget
	Hvis USB-stik anvendes, bedes nummeret anføres på omslag
Bilag:	Ingen.

OPGAVE JHP 1 (12 %)

En anden ordens kemisk reaktion er givet ved: 2A → produkter, hvor rateligningen kan skrives som

$$v = -\frac{d[A]}{dt} = k[A]^2$$

hvor $[A]$ står for koncentrationen af stoffet A, og k er en konstant. Det oplyses endvidere, at koncentrationen af stoffet A til tiden $t = 0$ er $[A]_0$.

a) Find $[A]$ som funktion af t.
b) Lav en skitse (håndtegnet graf) af $1/[A]$ som funktion af tiden t.
c) Er det muligt at finde $[A]$ som funktion af t ved at anvende Laplace-transformation? (begrund svaret)

OPGAVE JHP 2 (10 %)

Der er givet flg. begyndelsesværdiproblem:

$$y' + 2y = 0 \qquad ; \qquad y(0) = 1{,}5$$

a) Løs dette begyndelsesværdiproblem vha. Laplace-transformationer.
b) Løs dernæst det samme begyndelsesværdiproblem vha. en standardmetode fra kapitel 1 i lærebogen.

OPGAVE JHP 3 (20 %)

Der er givet en harmonisk oscillator, hvor massen m, dæmpningskonstanten c og fjederkonstanten k har værdierne:

m = 1 ; c = 4 ; k = 3

Den harmoniske oscillator udfører frie svingninger.

a) Opstil differentialligningen for den harmoniske oscillator.
b) Er der tale om over-, kritisk- eller underdæmpede svingninger?
c) Find svingningskoordinaten y som funktion af tiden, altså find y = y(t), hvilket svarer til at finde løsningen til differentialligningen under spgm. a).
d) Omskriv differentialligningen fra spgm. a) til to første ordens koblede differentialligninger efter principperne i theorem 1 i afsnit 4.1.
e) Find løsningen til dette system at to koblede første ordens differentialligninger.

OPGAVE JHP 4 (11 %)

Betragt en homogen metalstang med længden L. Stangen er termisk isoleret fra omgivelserne på sidefladerne. Vekselvirkningen med omgivelserne finder udelukkende sted via endefladerne, hvor temperaturen holdes konstant lig med 0 på begge endeflader.

Stangen er fremstillet af et materiale, hvis termiske ledningsevne, specifikke varmekapacitet og massetæthed netop antager sådanne værdier, at den termiske diffusivitet er lig med 1, altså $c^2 = 1$.

Ved eksperimentets start har stangen en temperaturfordeling givet ved:

$$f(x) = u(x,0) = \begin{cases} x & , \quad 0 < x < \frac{L}{2} \\ L - x & , \quad \frac{L}{2} < x < L \end{cases}$$

a) Hvor mange Fourier-komponenter (en, to, tre eller uendeligt mange) kræves der for at beskrive f(x)? (begrund svaret)
b) Forklar hvorfor $B_2 = B_4 = B_6 = \ldots = 0$. Du må gerne give en forklaring uden at udføre beregninger.
c) Find temperaturfordelingen som funktion af sted og tid inde i stangen, find altså u = u(x,t).

OPGAVE JHP 5 (14 %)

Betragt en metalstang med længden L = 6, tværsnitsareal A = 0,1. Den termiske ledningsevne har en x-afhængighed givet ved:

$$k = 5 - 0{,}6x$$

og den indre varmegenerering har en x-afhængighed givet ved:

$$f = 0{,}03(x-6)^4$$

Enheden for længden er m, for tværsnitsarealet m^2, for den termiske ledningsevne J/(Ksm) og for den indre varmegenerering J/sm.

Stangens udstrækning går fra x = 3 til x = 9, hvor den holdes på den konstante temperatur T = 0 °C ved x = 3 og er termisk isoleret ved x = 9.

Det antages, at der er tale om stationære forhold, hvorfor den tidsafledede er lig med nul. Der er således tale om en differentialligning i x, og denne løses med fordel vha. Finite Element Metoden (FEM).

a) Opskriv en passende differentialligning for dette problem.

Opgave JHP 5 fortsætter på næste side

b) Beskriv hvorledes man kan skrive Robin grænsebetingelserne i forbindelse med numeriske FEM - beregninger.
c) Udfør den numeriske FEM beregning vha. den opgivne Matlab-kode, hvor trinene inddeles med $h = 0{,}1$.

Slut på JHP-opgaveteksten.

UTR Opgave 1. (16 %)

Funktionen $f(x) = \exp(x) + x - 2$ betragtes. Vi søger efter funktionens skæring med x-aksen i nærheden af $x_0 = 1$.

a. Opstil et iterationsudtryk ved Newton Raphsons metode og gennemfør 10 beregninger.
b. Hvor mange iterationer skal der foretages inden den relative fejl mellem 2 iterationer er under 0,000001.
c. Opstil et udtryk til beregning af fejlen efter n+1 iterationer for Newton-Raphsons metode. Sammenlign med svaret i spørgsmål b. og kommentér.

UTR Opgave 2. (17 %)

Givet differentialligningen fra JHP Opgave 3. I denne opgave er der fundet et koblet sæt af første ordens differentialligninger. Endvidere er løsningen til differentialligningen fundet.

Vi anvender følgende begyndelsesværdibetingelser: $y(0) = 3 \ og \ y'(0) = -2$.

a. Løs det koblede sæt af første ordens differentialligninger vha. Eulers metode med stepstørrelsen h=0,05 for at finde $y(1) \ og \ y'(1)$.
b. Bestem den partikulære løsning til differentialligningen med de givne begyndelsesværdibetingelser.
c. Plot y(t) fra spørgsmål a. og den partikulære løsning fra spørgsmål b. i samme graf. Sammenhold de 2 grafer og kommentér.