UTR/alp

AALBORG UNIVERSITET ESBJERG

Skriftlig eksamen i

Matematisk modellering og numeriske metoder
M3 og K5

Onsdag den 4. januar 2012 kl. 09.00 – 13.00

Eksaminanden medbringer:	Alle hjælpemidler er tilladte med undtagelse af mobiltelefon og internetadgang. **Eksaminanderne medbringer selv papir til kladde og renskrift.**
Aflevering:	Bedømmelsen afleveres på ternet papir. Beregninger kan eventuelt afleveres på USB-stick (der må kun være beregninger på USB-stik). Opgave UTR opgave 1-2 afleveres i blåt omslag til Ulla Tradsborg Opgave JHP 1-5 afleveres i hvidt omslag til Jørgen H. Pedersen. Besvarelserne bedes forsynet med navn, cpr. og sidenummer. Hvis USB-stik anvendes, bedes nummeret anføres på omslag
Bilag:	Ingen.

UTR Opgave 1 . (16%)

Givet følgende integrale

$$\int_0^2 e^x dx$$

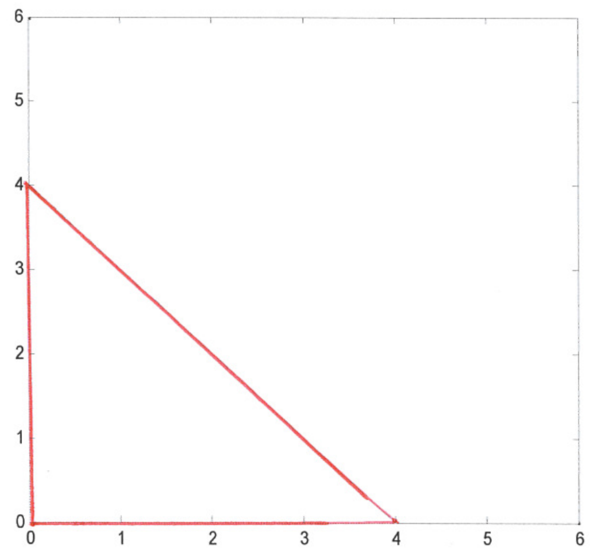
a. Anvend Simpson's metode til at beregne integralet. Sæt n=6.
b. Anvend Gauss integrations formel med 4 knuder/punkter.
c. Sammenlign resultaterne med den eksakte værdi og kommentér.

UTR Opgave 2. (17 %)

Givet randværdiproblemet

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 4\,x\,y\,,$$

hvor randen er nedenstående trekant, afgrænset af x- aksen, y-aksen samt af linjen y = 4 –x.



For randen haves:

u(x,0)=x

u(0,y)=y

og for den skrå linje $u(x, 4 - x) = -x^2 + 4x + 4$.

a. For h =1 ønskes opstillet ligninger til numerisk bestemmelse af en tilnærmet løsning til funktionen u(x,y) for de indre punkter.
b. Find vha. Gauss-Seidels metode en tilnærmet løsning til funktionen u(x,y) for de indre punkter. Benyt 0 som startværdier for de indre punkter.

OPGAVE JHP-1 (14 %)

Opvarmning og afkøling af en bygning kan med fordel modelleres vha. flg. ordinære differentialligning:

$$\frac{dT}{dt} = k_1(T - T_u) + k_2(T - T_ø) + P$$

hvor $T = T(t)$ er temperaturen inde i bygningen til tiden t, T_u er temperaturen uden for bygningen (udetemperaturen), $T_ø$ er den ønskede temperatur inde i bygningen og P er temperaturændringen forårsaget af personer og maskiner inde i bygningen. I differentialligningen optræder endvidere to konstanter k_1 og k_2.

a) Hvilke(t) fortegn har konstanterne k_1 og k_2?
b) Hvilke forhold/fænomener er bestemmende for konstanterne k_1 og k_2?
c) Er differentialligningen lineær og/eller homogen? (begrund svaret).
d) Lad udetemperaturen variere periodisk som: $T_u = A - B\cos\left(\left(\frac{2\pi}{24}\right)t\right)$ hvor A og B er konstanter. Tegn en skitse af udetemperaturen som funktion af tiden.
e) Løs denne differentialligning for det tilfælde, hvor både $T_ø$ og P er konstante, samt udetemperaturen varierer periodisk som angivet ved udtrykket under spørgsmål d.

OPGAVE JHP-2 (14 %)

Der er givet flg. differentialligning:

$$y'' + 10y' + 25y = 0$$

hvor $y = y(x)$.

a) Find den generelle løsning til denne differentialligning.

I det følgende ønskes den samme differentialligning løst på en lidt anden måde, nemlig hvor det antages, at man kender den ene basisfunktion til ovennævnte differentialligning. Ud fra denne kendte basisfunktion ønskes den anden fundet.

b) Vis at basisfunktionen $y_1 = e^{-5x}$ er en løsning til ovennævnte differentialligning.

Derefter dannes en ny funktion $y_2 = uy_1$. hvor $u = u(x)$.

c) Hvorfor kan u ikke blot være en konstant?
d) Find den første- og anden afledede af y_2 og indsæt disse i ovennævnte differentialligning. Hvilken slags ligning i u fremkommer herved?
e) Find u og eftervis at dette giver samme resultat som under spørgsmål a.

OPGAVE JHP-3 (12 %)

Der er givet en vektor i rummet:

$$\vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$$

a) Beregn divergensen af $\vec{r}/|\vec{r}|^3$, hvor $|\vec{r}|$ er længden af vektoren $\vec{r}$.
b) Beregn rotationen af $\vec{r}/|\vec{r}|^3$.

OPGAVE JHP-4 (18 %)

Betragt en streng med længden $L = \pi$. Massetætheden ρ og opspændingen (tension) T antager netop sådanne værdier at $c^2 = T/\rho = 1$. Strengen er fastgjort i begge ender og kan udføre transversale svingninger i planet på sædvanlig vis. Når strengen sættes i svingninger er den bragt til et udsving $f(x)$ givet ved

$$f(x) = \begin{cases} 0 \; ; \; 0 < x \leq \frac{\pi}{4} \\ h\left(\frac{x}{\pi} - \frac{1}{4}\right) \; ; \; \frac{\pi}{4} < x \leq \frac{\pi}{2} \\ h\left(\frac{3}{4} - \frac{x}{\pi}\right) \; ; \; \frac{\pi}{2} < x \leq \frac{3\pi}{4} \\ 0 \; ; \; \frac{3\pi}{4} < x \leq \pi \end{cases}$$

Strengen slippes fra hvile efter den er bragt til dette begyndelsesudsving. Konstanten h er meget lille. I bogen står anført flg. udtryk

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = f(x)$$

a) Hvorfor er der tale om en ulige periodisk (sinus) Fourier-udvikling af $f(x)$?
b) Ville det være muligt at udføre disse beregninger med en lige periodisk (cosinus) udvikling af $f(x)$?
c) Kan $f(x)$ beskrives med blot en enkelt Fourier-komponent? (begrund svaret).
d) Hvorfor må man stille som krav, at h skal være meget lille?
e) Find svingningsmønstret for strengen vha. Fourier-rækker.

Resultatet kan – efter nogle omskrivninger – udtrykkes på formen

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(nx)\cos(nt)$$

hvor

$$B_n = \frac{8h}{\pi^2 n^2} \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) \sin^2\left(n\frac{\pi}{8}\right)$$

f) Det ses at $B_n = 0$ for n lige. Hvad er forklaringen på det?

OPGAVE JHP-5 (9 %)

Betragt en homogen metalstang der er termisk isoleret på sidefladerne. Det er derfor kun muligt, at stangen vekselvirker termisk med omgivelserne via endefladerne. De éndimensionelle termiske forhold i denne stang kan beskrives via varmeledningsligningen

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

hvor $u = u(x,t)$ er temperaturen på stedkoordinaten x til tiden t, og c^2 er den termiske diffusivitet. Stangens længde er $L = 8$. Grænsebetingelserne er: $u(0,t) = u(8,t) = 0$, og begyndelsesbetingelsen er: $u(x,0) = f(x)$.

Varmeledningsligningen kan løses analytisk vha. f.eks. Fourier-rækker. I denne opgave skal vi se lidt på en speciel del af Finite Element Metoden.

Det antages videre at der er i alt 7 knudepunkter, og der til hvert knudepunkt kan knyttes en prøvefunktion efter udtrykket

$$v_j(x) = \begin{cases} x - j + 1 & ; \; j-1 \le x \le j \\ -x + j + 1 & ; \; j \le x \le j+1 \\ & 0 \; ellers \end{cases}$$

hvor $j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$, hvorved der altså er tale om 7 prøvefunktioner.

a) Tegn en skitse af prøvefunktionen for det 4. knudepunkt, altså for $j = 4$.

I Finite Element Metoden søges løsninger på formen

$$u(x,t) = U_1(t)v_1(x) + U_2(t)v_2(x) + \ldots + U_7(t)v_7(x)$$

hvor der for det aktuelle tilfælde er 7 led, nemlig leddene for de 7 knudepunkter. Dette kan indsættes i varmeledningsligningen, hvorved det er muligt at nå frem til udtrykket

$$\sum_{i=1}^{7} \frac{dU_i(t)}{dt} \int_0^8 v_i(x)v_j(x)dx = -c^2 \sum_{i=1}^{7} U_i(t) \int_0^8 \frac{dv_i}{dx}\frac{dv_j}{dx}dx$$

Vi skal ikke beskæftige os i detaljer med dette udtryk; men blot se lidt på de størrelser der indgår på højresiden.

b) Beregn $\frac{dv_4}{dx}$ og $\frac{dv_5}{dx}$.

c) Beregn $\int_0^8 \frac{dv_4}{dx}\frac{dv_4}{dx}dx$ og $\int_0^8 \frac{dv_4}{dx}\frac{dv_5}{dx}dx$.