UTR/alp

AALBORG UNIVERSITET ESBJERG

Skriftlig eksamen i

Matematisk modellering og numeriske metoder
M3

Fredag den 4. januar 2013 kl. 09.00 – 13.00

Eksaminanden medbringer:	Alle hjælpemidler er tilladte med undtagelse af mobiltelefon og internetadgang. **Eksaminanderne medbringer selv papir til kladde og renskrift.**
Aflevering:	Opgave UTR 1-3 afleveres i hvidt omslag til Ulla Tradsborg. *Bedømmelsen afleveres på ternet papir.* *Beregninger kan eventuelt afleveres på USB-stik (der må kun være beregninger på USB-stik).* Opgave JHP 1-4 afleveres i blåt omslag eller USB-stik til Jørgen H. Pedersen Besvarelserne bedes forsynet med navn, cpr. og sidenummer. Hvis USB-stik anvendes, skrives nummeret på omslaget Hvis USB-stik anvendes, bedes nummeret anføres på omslag
Bilag:	Ingen.

OPGAVE JHP 1 (12 %)

Der er givet flg. differentialligning:

$$\frac{d^2v(x)}{dx^2} = \frac{P}{EI}(x - L)$$

hvor L, P, E og I alle er konstanter.

a) Find den generelle løsning til denne differentialligning, altså find $v = v(x)$.

Der oplyses endvidere to betingelser:

$$\frac{dv}{dx} = 0 \quad for\ \ x = 0\ og\ \ v(x) = 0\ for\ x = 0$$

b) Anvend disse betingelser til at bestemme integrationskonstanterne fra spgm. a), og anfør løsningen med disse indsat.
c) Fra hvilken teknisk sammenhæng stammer denne differentialligning?
d) Giv en tolkning af de to betingelser v(0) = 0 og v'(0) = 0.

OPGAVE JHP 2 (10 %)

Der er givet flg. begyndelsesværdiproblem:

$$y' + 2y = 0 \qquad ; \qquad y(0) = 1{,}5$$

a) Løs dette begyndelsesværdiproblem vha. Laplace-transformationer.
b) Løs dernæst det samme begyndelsesværdiproblem vha. en standardmetode fra kapitel 1 i lærebogen.

OPGAVE JHP 3 (20 %)

Der er givet en harmonisk oscillator, hvor massen m, dæmpningskonstanten c og fjederkonstanten k har værdierne:

m = 1 ; c = 4 ; k = 3

Den harmoniske oscillator udfører frie svingninger.

a) Opstil differentialligningen for den harmoniske oscillator.
b) Er der tale om over-, kritisk- eller underdæmpede svingninger?
c) Find svingningskoordinaten y som funktion af tiden, altså find y = y(t), hvilket svarer til at finde løsningen til differentialligningen under spgm. a).
d) Omskriv differentialligningen fra spgm. a) til to første ordens koblede differentialligninger efter principperne i theorem 1 i afsnit 4.1.
e) Find løsningen til dette system at to koblede første ordens differentialligninger.

OPGAVE JHP 4 (11 %)

Betragt en homogen metalstang med længden L. Stangen er termisk isoleret fra omgivelserne på sidefladerne. Vekselvirkningen med omgivelserne finder udelukkende sted via endefladerne, hvor temperaturen holdes konstant lig med 0 på begge endeflader.

Stangen er fremstillet af et materiale, hvis termiske ledningsevne, specifikke varmekapacitet og massetæthed netop antager sådanne værdier, at den termiske diffusivitet er lig med 1, altså $c^2 = 1$.

Ved eksperimentets start har stangen en temperaturfordeling givet ved:

$$f(x) = u(x,0) = \begin{cases} x & , \quad 0 < x < \frac{L}{2} \\ L - x & , \quad \frac{L}{2} < x < L \end{cases}$$

a) Hvor mange Fourier-komponenter (en, to, tre eller uendeligt mange) kræves der for at beskrive f(x)? (begrund svaret)
b) Forklar hvorfor $B_2 = B_4 = B_6 = \ldots = 0$. Du må gerne give en forklaring uden at udføre beregninger.
c) Find temperaturfordelingen som funktion af sted og tid inde i stangen, find altså u = u(x,t).

OPGAVE JHP 5 (14 %)

Betragt en metalstang med længden L = 6, tværsnitsareal A = 0,1. Den termiske ledningsevne har en x-afhængighed givet ved:

$$k = 5 - 0{,}6x$$

og den indre varmegenerering har en x-afhængighed givet ved:

$$f = 0{,}03(x-6)^4$$

Enheden for længden er m, for tværsnitsarealet m^2, for den termiske ledningsevne J/(Ksm) og for den indre varmegenerering J/sm.

Stangens udstrækning går fra x = 3 til x = 9, hvor den holdes på den konstante temperatur T = 0 °C ved x = 3 og er termisk isoleret ved x = 9.

Det antages, at der er tale om stationære forhold, hvorfor den tidsafledede er lig med nul. Der er således tale om en differentialligning i x, og denne løses med fordel vha. Finite Element Metoden (FEM).

a) Opskriv en passende differentialligning for dette problem.
b) Beskriv hvorledes man kan skrive Robin grænsebetingelserne i forbindelse med numeriske FEM - beregninger.
c) Udfør den numeriske FEM beregning vha. den opgivne Matlab-kode, hvor trinene inddeles med h = 0,1

UTR Opgave 1. (16 %)

Funktionen $f(x) = \exp(x) + x - 2$ betragtes. Vi søger efter funktionens skæring med x-aksen i nærheden af $x_0 = 1$.

a. Opstil et iterationsudtryk ved Newton Raphsons metode og gennemfør 10 beregninger.
b. Hvor mange iterationer skal der foretages inden den relative fejl mellem 2 iterationer er under 0,000001.
c. Opstil et udtryk til beregning af fejlen efter n+1 iterationer for Newton-Raphsons metode. Sammenlign med svaret i spørgsmål b. og kommentér.

UTR Opgave 2. (17 %)

Givet differentialligningen fra JHP Opgave 3. I denne opgave er der fundet et koblet sæt af første ordens differentialligninger. Endvidere er løsningen til differentialligningen fundet.

Vi anvender følgende begyndelsesværdibetingelser: $y(0) = 3 \;\; og \; y'(0) = \; -2$.

a. Løs det koblede sæt af første ordens differentialligninger vha. Eulers metode med stepstørrelsen h=0,05 for at finde $y(1) \; og \; y'(1)$.
b. Bestem den partikulære løsning til differentialligningen med de givne begyndelsesværdibetingelser.
c. Plot y(t) fra spørgsmål a. og den partikulære løsning fra spørgsmål b. i samme graf. Sammenhold de 2 grafer og kommentér.