UTR/alp

AALBORG UNIVERSITET ESBJERG

Skriftlig eksamen i

Matematisk modellering og numeriske metoder
M3

Fredag den 14. januar 2011 kl. 09.00 – 13.00

Eksaminanden medbringer:	Alle hjælpemidler er tilladte med undtagelse af mobiltelefon og internetadgang. **Eksaminanderne medbringer selv papir til kladde og renskrift.**
Aflevering:	Bedømmelsen afleveres på ternet papir. Bilag kan eventuelt afleveres på USB-stick (der må kun være bilag på USB-stick). Opgave 1-5 afleveres i blåt omslag til Jørgen Houe Pedersen. Opgave 6-7 afleveres i hvidt omslag til Ulla Tradsborg. Besvarelserne bedes forsynet med navn, cpr. og sidenummer.

Bilag:	Ingen.

Opgave 1 starter på næste side.

Dette sæt indeholder i alt 7 opgaver. Ved bedømmelsen lægges der stor vægt på, at du tydeligt angiver den anvendte teori og metode.

OPGAVE 1 (12%)

Betragt flg. differentialligning:

$$y' + (x+2)y^2 = 0$$

a) Er denne differentialligning lineær eller ulineær? (begrund svaret).
b) Find den generelle løsning til differentialligningen.

OPGAVE 2 (16%)

Der er givet to koblede differentialligninger:

$$x_1' = 2x_1 + 8x_2$$
$$x_2' = x_1 - 5x_2$$

a) Forklar hvordan du kan se, at der er tale om koblede differentialligninger.
b) Omskriv de to koblede differentialligninger til en matrixsligning.
c) Find egenværdierne for koefficientmatriksen samt de tilhørende egenvektorer.
d) Find den generelle løsning til systemet af de to koblede differentialligninger.

OPGAVE 3 (15%)

Betragt en homogen metalstang med længden L=1. Stangen er fuldstændig termisk isoleret fra omgivelserne, dvs. såvel sidefladerne som endefladerne er termisk isolerede.

Stangen er fremstillet af et materiale, hvis termiske ledningsevne, specifikke varmekapacitet og massetæthed netop antager sådanne værdier, at den termiske diffusivitet er lig med 1, altså $c^2 = 1$.

Ved eksperimentets start har stangen en temperaturfordeling givet ved:

$$u(x,0) = \begin{cases} x & , \ 0 < x \leq ½ \\ 1 - x & , \ ½ < x < 1 \end{cases}$$

Hvor u(x,0) altså angiver temperaturen på stedkoordinaten x inde i stangen til tiden t = 0.

a) Find temperaturen som funktion af sted og tid inde i stangen, altså find u(x,t).
b) Lav en skitse (håndtegnet graf) der viser temperaturfordelingen inde i stangen til forskellige tidspunkter.

OPGAVE 4 (12%)

Der er givet flg. begyndelsesværdiproblem:

$$y'' - y' - 6y = 0$$

med betingelserne: $y(0) = 6$ og $y'(0) = 13$.

Løs dette begyndelsesværdiproblem vha. Laplace-transformation.

OPGAVE 5 (12%)

Der er givet et vektorfelt ved udtrykket:

$$\vec{v} = [e^{2x}\cos(2y), e^{2x}\sin(2y), 5e^{2x}]$$

a) Find divergensen af dette vektorfelt.
b) Find rotationen af dette vektorfelt.

Opgave 6. (15 %)

Funktionen f(x) = 3cos(x)-5x betragtes. Vi søger efter funktionens skæring med x-aksen.

a. Opstil et iterationsudtryk vha. Fixed punkt metoden og diskutér om iterationen konvergerer. Roden i nærheden af 0 søges.
b. Gennemfør 10 beregninger .
c. Opstil et iterationsudtryk ved Newton Raphsons metode og gennemfør 10 beregninger.
d. Hvilken af de 2 metoder konvergerer hurtigst. Svaret skal begrundes.

Opgave 7. (18,33 %)

Givet følgende begyndelsesværdiproblem:

$$y' \ + \ (x+2)\,y^2 = \ 0 \quad og \quad y(0) = 1$$

a. Løs denne differentialligning vha. Eulers metode med stepstørrelsen h=0,25 for at finde y(2).
b. Løs denne differentialligning vha. Runge Kutta af 4'orden med stepstørrelsen h = 0,25 for at finde y(2).
c. Diskutér fejlens størrelse for de 2 metoder. Hvilken er bedst og hvorfor? Anvend passende beregninger. Sammenlign evt. med den eksakte løsning.