

AALBORG UNIVERSITET ESBJERG

Skriftlig eksamen i
Matematisk modellering og numeriske metoder

Fredag den 25. februar 2011 kl. 09.00 – 13.00

Eksaminanden medbringer: Alle hjælpemidler er tilladte med undtagelse af mobiltelefon og internetadgang.

Eksaminanderne medbringer selv papir til kladde og renskrift.

Aflevering: Bedømmelsen afleveres på ternet papir.

Bilag kan eventuelt afleveres på USB-stick (der må kun være bilag på USB-stick, undtaget opgave 3A)

Opgave 1-2 afleveres i gult omslag til Ulla Tradsborg

Opgave 3-7 afleveres i grønt omslag til Jørgen Houe Pedersen

Besvarelserne bedes forsynet med navn, cpr. nr. og sidenr.

Bilag: Ingen.

Opgave 1 starter på næste side.

Opgave 1 (15 %)

Givet følgende data:

x	f(x)
2,0	0,50
3,0	0,33
4,0	0,25
5,0	0,20
6,0	0,17

- A. Anvend Newton's divided differens interpolation til at opstille et fjerdegrads polynomium. Og beregn en tilnærmet værdi af $f(2,8)$.
- B. Opstil et udtryk for fejlen på det i spørgsmål A opstilledefjerde gradspolynomium.

Opgave 2 (18,33 %)

Givet følgende integrale

$$\int_{-3}^5 (4x - 3)^3 dx$$

- A. Anvend Simpson's metode til at beregne integralet. Sæt $n=4$.
- B. Bestem den eksakte værdi af integralet vha. almindelig integration.
- C. Kommentér på resultatet. (Anvend evt. Simpson's metode for evt. $n=2$).

OPGAVE 3 (18 %)

Betragt flg. differentialligning:

$$y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$$

Hvor $y = y(x)$.

- a) Er denne differentialligning lineær eller ulineær? (begrund svaret).

Denne differentialligning kan sammenlignes med den differentialligning der studeres i eksempel 6 p. 17 i Advanced Engineering Mathematics, altså i lærebogen.

- b) Ud fra denne sammenligning ønskes nu anført løsningen til ovennævnte differentialligning *uden at regne*; men dit argument skal dog begrundes.
c) Løs ovennævnte differentialligning efter samme metode som i eksempel 6 p. 17 i lærebogen.
d) Tegn en skitse (håndtegnet graf) af løsningen.

Hint til spørgsmål c: $\int \frac{1}{u(1+u^2)} du = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{u^2}{1+u^2}\right)$.

OPGAVE 4 (12 %)

Der er givet flg. differentialligning:

$$x^2 y'' - 9xy' + 25y = 0$$

Hvor $y = y(x)$.

- a) Hvilken type differentialligning er der tale om?
b) Find den generelle løsning til denne differentialligning.

OPGAVE 5 (18 %)

Der er givet en funktion ved flg. udtryk:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \quad -\pi < x < 0 \\ \sin(x) & , \quad 0 < x < \pi \end{cases}$$

- a) Er $f(x)$ lige eller ulige eller ingen af delene? (begrund svaret)
b) Find Fourier-rækken for $f(x)$ når det antages, at den har perioden $p = 2\pi$.
c) Lav en skitse (håndtegnet graf) af de to første betydende partialsummer.

OPGAVE 6 (9 %)

Der er givet flg. begyndelsesværdiproblem:

$$y'' - 4y' + 4y = 0$$

hvor $y = y(t)$, med betingelserne $y(0) = 0$ og $y'(0) = 5$.

Løs dette begyndelsesværdiproblem vha. Laplace-transformation.

OPGAVE 7 (10 %)

Der er givet et vektorfelt ved udtrykket:

$$\vec{v} = (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} [x, y, z]$$

Find divergensen af dette vektorfelt.

Slut på opgaveteksten.