UTR/alp

AALBORG UNIVERSITET ESBJERG

Skriftlig eksamen i

Matematisk modellering og numeriske metoder
M3

Fredag den 26. august 2011 kl. 09.00 – 13.00

Eksaminanden medbringer:	Alle hjælpemidler er tilladte med undtagelse af mobiltelefon og internetadgang. **Eksaminanderne medbringer selv papir til kladde og renskrift.**
Aflevering:	Bedømmelsen afleveres på ternet papir. Beregninger kan eventuelt afleveres på USB-stick (der må kun være beregninger på USB-stick). Opgave UTR opgave 1-2 afleveres i blåt omslag til Ulla Tradsborg Opgave JHP 1-6 afleveres i hvidt omslag til Jørgen H. Pedersen. Besvarelserne bedes forsynet med navn, cpr. og sidenummer. Hvis USB-stick anvendes, bedes nummeret anføres på omslag

---

Bilag: Ingen.

UTR Opgave 1 (15 %)

Nedenstående ligning betragtes

$$x^3 - 2 = 0.$$

a. Opstil et iterationsudtryk ved hjælp af Fixed-point metoden og diskutér om iterationen konvergerer.
b. Opstil iterationsudtrykket for Newton-Raphsons metode.

UTR Opgave 2 (18%)

Givet randværdiproblemet

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 0$$

hvor $x \in [0, a]$ og y $\in [0, b]$.

Endvidere haves

u(0,y)=0

u(a,y)=0

u(x,0)=0

u(x,b)=g(x)

$$g(x) = \begin{cases} x & for\ x \in [0, \frac{a}{2}] \\ a - x & for\ for\ x \in [\frac{a}{2},\ a] \end{cases}$$

a. Klassificér ligningen.
b. Idet a=b=3 ønskes der opstillet ligninger til en numerisk bestemmelse af en tilnærmet løsning til funktionen u(x,y) for x={0, 1, 2, 3} og for y= { 0, 1, 2, 3}.

OPGAVE JHP-1 (10 %)

Der er givet flg. differentialligning:

$$x^3 y' + 3x^2 y = 5sinh(10x)$$

a) Er denne differentialligning lineær eller ulineær? Begrund svaret.
b) Find den generelle løsning til denne differentialligning efter mindst to forskellige metoder.

OPGAVE JHP-2 (8 %)

Der er givet flg. differentialligning:

$$y' + \frac{y}{x^2} = axe^{1/x}$$

hvor a er en reel konstant.

a) Er denne differentialligning lineær eller ulineær? Begrund svaret.
b) Find den generelle løsning til denne differentialligning.

OPGAVE JHP-3 (19 %)

Der er givet flg. differentialligning:

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$$

a) Er denne differentialligning lineær eller ulineær? Begrund svaret.
b) Vis at basisfunktionen

$$y_1 = x$$

er en løsning til denne differentialligning.
c) Anvend ordensreduktion (reduction of order) til at finde den anden basisfunktion.
d) Opskriv den generelle løsning til differentialligningen.

OPGAVE JHP-4 (10 %)

Betragt en homogen metalstang med længden $L = \pi$

Stangen er fuldstændig termisk isoleret fra omgivelserne, dvs. såvel side- som endefladerne er termisk isolerede. Ved eksperimentets start har stangen en temperaturfordeling givet ved:

$$u(x,0) = \begin{cases} \pi/2 - x & \text{for} \quad 0 < x < \pi/2 \\ x - \pi/2 & \text{for} \quad \pi/2 < x < \pi \end{cases}$$

hvor *u(x, 0)* altså angiver temperaturen på stedkoordinaten x inde i stangen til tiden t = 0.

Stangen er fremstillet af et materiale, hvis termiske ledningsevne, specifikke varmekapacitet og massetæthed netop antager sådanne værdier, at den termiske diffusivitet er lig med 1.

A. Find temperaturen som funktion af sted og tid inde i stangen, altså find *u(x,t)*.
B. Lav en skitse (håndtegnet graf) der viser temperaturfordelingen inde i stangen til forskellige tidspunkter.

OPGAVE JHP-5 (10 %)

Betragt en homogen metalstang med længden $L = \pi$

Stangen er termisk isoleret på sidefladerne; men kan vekselvirke termisk med omgivelserne via endefladerne. Ved eksperimentets start har stangen en temperaturfordeling givet ved:

$$u(x,0) = \begin{cases} \pi/2 - x & \text{for} \quad 0 < x < \pi/2 \\ x - \pi/2 & \text{for} \quad \pi/2 < x < \pi \end{cases}$$

hvor *u(x, 0)* altså angiver temperaturen på stedkoordinaten x inde i stangen til tiden t = 0.

Stangens endeflader holdes begge konstant temperatur under hele eksperimentet, nemlig på temperaturen

$$u(0,t) = u(\pi,t) = \pi/2$$

Stangen er fremstillet af et materiale, hvis termiske ledningsevne, specifikke varmekapacitet og massetæthed netop antager sådanne værdier, at den termiske diffusivitet er lig med 1.

A. Find temperaturen som funktion af sted og tid inde i stangen, altså find $u(x,t)$.
B. Lav en skitse (håndtegnet graf) der viser temperaturfordelingen inde i stangen til forskellige tidspunkter.

OPGAVE JHP-6 (10 %)

Find divergensen og rotationen af flg. vektorfelt:

$$\vec{v} = [x^2 \sin y, y^2 \cos z, -z^2 \tan x]$$