Opgave 1 (25 POINT)

1. Find uden brug af computer den generelle løsning til den homogene ODE $y'' + ay' = 0$, hvor $a \neq 0$ er en ukendt konstant.
2. Det oplyses, at der findes en partikulær løsning til den inhomogene ODE
$$y''(x) + ay'(x) = 2\cos(2x) + a\sin(2x) \tag{1}$$
som ikke afhænger af a. Find den generelle løsning til (1) ved hjælp af de ubestemte koefficienters metode. Vink: Da det er oplyst, at der eksisterer en løsning, som ikke afhænger af a, kan en partikulær løsning findes for en selvvalgt værdi af a. Det kan herefter undersøges, om den fundne løsning er en løsning for alle værdier af a.
3. Løs begyndelsesværdiproblemet givet ved (1) og $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.
4. Vis, at $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ givet ved $f(x) = \sin^2(x)$ er en løsning til (1). Det må her benyttes, at $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$ og $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$.
5. Brug entydighed af løsninger til at konkludere ud fra de to foregående punkter, at
$$\sin^2(x) = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cos(2x). \tag{2}$$
6. Find Fourierkoefficienterne a_0, a_n og b_n, $n \in \mathbb{N}$ i Fourierrækken for f,
$$f(x) = \sin^2(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx), \tag{3}$$
ved hjælp af (2).

Opgave 2 (15 POINT)

Betragt en streng på en elektrisk guitar med en længde på $L = 64.8\,\mathrm{cm}$, en masse pr. længdeenhed på $\rho = 0.00545\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}}$ og en spænding (tension) på $T = 49.32\,\mathrm{N}$.

Vi antager, at stangen er helt uniform i længderetningen, tilpas tynd til, at vi kan betragte den som endimensionel, perfekt elastisk og frit bøjelig, at tyngdekraftens påvirkning af strengen kan negligeres og at strengen kun vibrerer vinkelret på strengens retning.

Et eksperiment går ud på at strengen bringes i en bestemt position, hvorefter den slippes.

Lad $u(x,t)$, $0\,\mathrm{cm} \leq x \leq 64.8\,\mathrm{cm}$, $t \geq 0$ betegne strengens udsving (vinkelret på strengens retning) i et givet punkt x og til et givet tidspunkt t, hvor x angiver afstanden fra den ene ende af strengen, og t angiver tiden, der er gået siden eksperimentets begyndelse.

1. Opskriv en partiel differentialligning (og kun differentialligningen uden eventuelle betingelser), som beskriver udviklingen i strengens udsving. Eventuelt indgående kendte konstanter ønskes angivet med fire betydende cifre. Det kan benyttes, at $\frac{\mathrm{N}}{\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}}} = \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}$.
2. Det kan vises, at givet visse betingelser har den partielle differentialligning fra ovenstående punkt en entydig løsning. En type af disse betingelser kaldes en randbetingelse. Hvordan bør randbetingelserne se ud i situationen, hvor guitarstrengen er spændt fast i en guitar?

3. Antag, at guitarstrengen i udgangspunktet $t = 0$ opfylder at $u(x, 0) = g(x)$ og $u_t(x, 0) \equiv 0$, hvor $g\colon [0, L] \to \mathbb{R}$ er en given funktion. Hvad kaldes en betingelse af denne type?
4. Strengen er guitarens dybe E-streng. En korrekt stemt dyb E-streng har grundfrekvensen 82.4 Hz. Hvis guitaren skal stemme, er spændingen T så rigtig, skal T øges, eller skal T mindskes? Begrund dit svar.

Opgave 3 (15 POINT)

1. Find den generelle løsning til Euler-Cauchy-ligningen $x^2 \cdot y''(x) - 19x \cdot y'(x) + 91y(x) = 0$.
2. Vis, at $y_0(x) = x^{11}$ løser den inhomogene andenordens ODE
$$x^2 \cdot y''(x) - 19x \cdot y'(x) + 91y(x) = -8x^{11}. \tag{4}$$
3. Find den generelle løsning til (4).
4. Find en funktion $r\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, så den inhomogene andenordens ODE
$$x^2 \cdot y''(x) - 19x \cdot y'(x) + 91y(x) = r(x) \tag{5}$$
har løsningen $y_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ givet ved $y_2(x) = x^7 + x^9 + x^{13}$.
5. Find den generelle løsning til (5). (Bemærk, at denne delopgave kan løses uafhængigt af, om du har fundet r i forrige punkt).

Opgave 4 (25 POINT)

I denne opgave skal vi løse den inhomogene andenordens ODE
$$y''(t) + \tfrac{11}{4}y(t) = 2\sqrt{3}e^{-t}\sin\left(\tfrac{\pi}{6} - \tfrac{\sqrt{3}}{2}t\right) \tag{6}$$
med begyndelsesværdibetingelse $y(0) = 0$ og $y'(0) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ vha. Laplace-transformationen.

1. Benyt den trigonometriske additionsformel $\sin(x + y) = \sin(x)\cos(y) + \sin(y)\cos(x)$ til at finde konstanter A og B så
$$2\sqrt{3}e^{-t}\sin\left(\tfrac{\pi}{6} - \tfrac{\sqrt{3}}{2}t\right) = Ae^{-t}\sin\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}t\right) + Be^{-t}\cos\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}t\right)$$
(bemærk fortegnsændringen på $\frac{\sqrt{3}}{2}$). Det kan benyttes, at $\sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$ og $\cos(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
2. Begyndelsesværdiproblemet givet ved (6) og begyndelsesværdibetingelserne $y(0) = 0$ og $y'(0) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ kan nu skrives på formen
$$y''(t) + \tfrac{11}{4}y(t) = Ae^{-t}\sin\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}t\right) + Be^{-t}\cos\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}t\right), \tag{7a}$$
$$y(0) = 0, \quad y'(0) = -\tfrac{\sqrt{3}}{2} \tag{7b}$$
med A og B som i ovenstående punkt. Anvend Laplace-transformationen på begge sider af (7a) til at finde en ligning for den Laplace-transformerede løsning $Y = \mathcal{L}(y)$ (i første omgang skal Y ikke isoleres). Hvis du ikke har fundet A og B, så kan de blot betragtes som ukendte konstanter i udtrykket.

3. Isolér udtrykket for $Y(s)$ i resultatet fra ovenstående punkt. Det kan benyttes, at Laplace-transformationen af højresiden i (7a) (som er identisk med højresiden i (6)) kan skrives på følgende måde:
$$\frac{\sqrt{3}(s-\frac{1}{2})}{(s+1)^2+\frac{3}{4}}.$$
4. Isoleres $Y(s)$ korrekt, fås et udtryk for $Y(s)$, som kan skrives på formen
$$Y(s) = \frac{C}{(s+D)^2+E}. \tag{8}$$
Find konstanterne C, D og E.
5. Find løsningen til begyndelsesværdiproblemet (7) ved at tage den inverse Laplace-transformation af udtrykket (8) med de rette værdier af C, D og E indsat. Hvis du ikke har fundet C, D og E (eller hvis du er usikker på, om du har regnet rigtigt), kan du blot betragte C, D og E som ukendte konstanter.

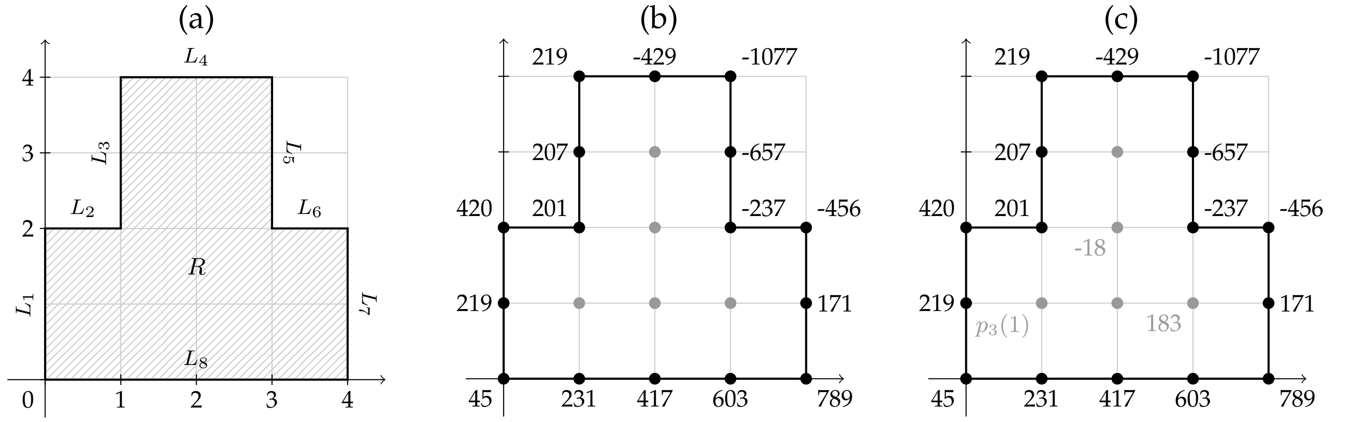
Opgave 5 **(20 POINT)**

Lad $R = [0,4]\times[0,4]\setminus\big([0,1]\times[2,4]\cup[3,4]\times[2,4]\big)\subset\mathbb{R}^2$ som vist i Figur 1(a), og lad linjestykkerne L_i, $i = 1,\dots,8$ være givet ved
$$\begin{aligned}
&L_1 = \{0\}\times[0,2], && L_2 = [0,1]\times\{2\}, && L_3 = \{1\}\times[2,4], && L_4 = [1,3]\times\{4\},\\
&L_5 = \{3\}\times[2,4], && L_6 = [3,4]\times\{2\}, && L_7 = \{4\}\times[0,2], && L_8 = [0,4]\times\{0\},
\end{aligned}$$
som ligeledes er illustreret i Figur 1(a).

Betragt Poisson-ligningen
$$\Delta u(x,y) = u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 3xy - 12x - 9y + 36 \tag{9}$$
på R med Dirichlet-randbetingelser givet ved
$$\begin{aligned}
&u(x,y) = -1.5y^3 + 18y^2 + 157.5y + 45 && \text{på} \quad L_1, && && u(x,y) = 420 - 219x && \text{på} \quad L_2,\\
&u(x,y) = -y^3 + 12y^2 - 35y + 231 && \text{på} \quad L_3, && && u(x,y) = 867 - 648x && \text{på} \quad L_4,\\
&u(x,y) = 603 - 420y && \text{på} \quad L_5, && && u(x,y) = 420 - 219x && \text{på} \quad L_6,\\
&u(x,y) = 0.5y^3 - 6y^2 - 612.5y + 789 && \text{på} \quad L_7 && \text{og} && u(x,y) = 186x + 45 && \text{på} \quad L_8.
\end{aligned}$$

Betragt masken, som består af heltalspar (i,j), $i,j\in\mathbb{Z}$, hvor $\mathbb{Z}$ er mængden af hele tal. Vi kan benytte Dirichlet-randbetingelserne til at bestemme u's værdi i de maskepunkter, som flugter med randen af R. Disse værdier er angivet i Figur 1(b). Tilbage er de 5 med gråt markerede maskepunkter, som ligger i R, hvor vi ikke kender værdien af u. Vi ønsker at finde en numerisk løsning til Poisson-problemet i disse punkter, dvs. en approksimation $u_{ij}\approx u(i,j)$.

1. Benyt metoden, som baserer sig på at bruge den centrale andenordensdifferenskvotient for u_{xx} og u_{yy} med samme skridtlængde $h = 1$ i både x- og y-retningen, til at *opskrive* fem lineære ligninger i de fem ubekendte u_{ij}, hvor u_{ij} er approksimationer af $u(i,j)$.



Figur 1: (a): Regionen R og linjerne L_i, $i = 1, \dots, 8$. (b): Maskepunkter med visse værdier angivet. (c) Værdier i maskerandpunkter samt approksimationer af punkterne $u(1,1)$, $u(2,2)$ og $u(3,1)$ angivet.

I stedet for at løse de fem ligninger med fem ubekendte, vil vi i første omgang forsøge at udnytte, at vi kender punkterne $u(1,0)$, $u(1,2)$, $u(1,3)$ og $u(1,4)$ til at approksimere $u(1,1)$ vha. et interpolationspolynomium.

2. Find et interpolationspolynomium p_3, som går gennem punkterne $(0, u(1,0))$, $(2, u(1,2))$, $(3, u(1,3))$ og $(4, u(1,4))$. Begrund eventuelt dit svar.

3. Evaluér interpolationspolynomiet p_3 fra foregående punkt i 1 og brug resultatet som approksimation af $u(1,1)$: $u_{11} = p_3(1)$.

På samme måde som vi i de to ovenstående punkter fandt en approksimation u_{11} af $u(1,1)$, kan man finde approksimationer u_{22} for $u(2,2)$ og u_{31} for $u(3,1)$ ved at udnytte, at vi kender $u(x,2)$ for $x = 0,1,3,4$ og $u(1,y)$ for $y = 0,2,3,4$. Dette giver $u_{22} = -18$ og $u_{31} = 183$, som det også fremgår af Figur 1(c). Der er nu to punkter tilbage, som vi ingen approksimation har af.

4. Find u_{21} og u_{23} vha. ligningerne, du opstillede i første punkt i denne opgave og de allerede kendte værdier for de andre u_{ij}'er.

5. Afgør, om de fundne approksimationer løser ligningssystemet fra første punkt.

6. Hvis u_{ij}'erne løser ligningssystemet, kan vi så være sikre på, at $u(i,j) = u_{ij}$?