UTR/alp

AALBORG UNIVERSITET ESBJERG

Skriftlig eksamen i

Partielle differentialligninger, sandsynlighedsregning og statistik
B3

Onsdag den 4. januar 2012 kl. 09.00 – 13.00

Eksaminanden medbringer:

Alle hjælpemidler er tilladte med undtagelse af mobiltelefon og internetadgang.

Eksaminanderne medbringer selv papir til kladde og renskrift.

Aflevering:

Bedømmelsen afleveres på ternet papir.
Beregninger kan eventuelt afleveres på USB-stick (der må kun være beregninger på USB-stick).

Opgave UTR 1-3 afleveres i gult omslag til Ulla Tradsborg.
Opgave JHP 1-4 afleveres i rødt omslag til Jørgen H. Pedersen

Besvarelserne bedes forsynet med navn, cpr. og sidenummer.
Hvis UDB-stick anvendes, skrives nummeret på omslaget

Bilag:

Ingen.

UTR Opgave 1 . (16%)

Givet følgende integrale

$$\int_0^2 e^x dx$$

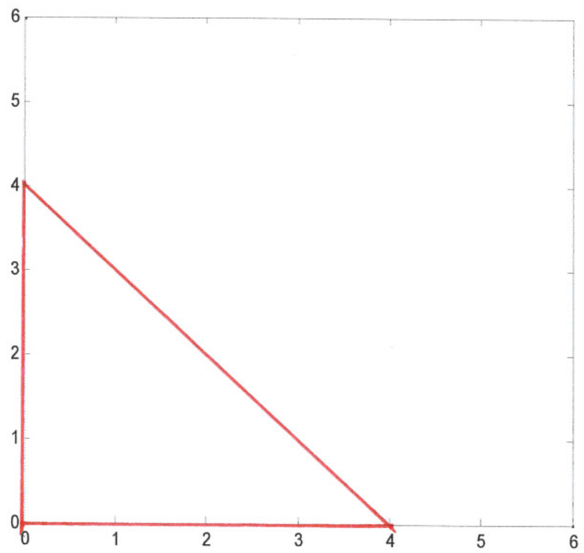
a. Anvend Simpson's metode til at beregne integralet. Sæt n=6.
b. Anvend Gauss integrations formel med 4 knuder/punkter.
c. Sammenlign resultaterne med den eksakte værdi og kommentér.

UTR Opgave 2. (17 %)

Givet randværdiproblemet

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 4\,x\,y\,,$$

hvor randen er nedenstående trekant, afgrænset af x- aksen, y-aksen samt af linjen y = 4 –x.



For randen haves:

u(x,0)=x

u(0,y)=y

og for den skrå linje $u(x, 4-x) = -x^2 + 4x + 4$.

a. For h =1 ønskes opstillet ligninger til numerisk bestemmelse af en tilnærmet løsning til funktionen u(x,y) for de indre punkter.
b. Find vha. Gauss-Seidels metode en tilnærmet løsning til funktionen u(x,y) for de indre punkter. Benyt 0 som startværdier for de indre punkter.

UTR Opgave 3. (17 %)

I et stort vareparti er 1,5 % af enhederne defekte. Der udtages en stikprøve på 40 enheder.

a. Begrund hvilken fordeling udtrækningen tilhører.
b. Beregn sandsynligheden for at der højst er 2 defekte i stikprøven.
c. Beregn sandsynligheden for at der mindst er 1 defekt i stikprøven.
d. Beregn sandsynligheden for at der i 10 udtrækninger fra varepartiet netop vil være 5 stikprøver med hver højst 2 defekte.

OPGAVE JHP-1 (12 %)

Opvarmning og afkøling af en bygning kan med fordel modelleres vha. flg. ordinære differentialligning:

$$\frac{dT}{dt} = k_1(T - T_u) + k_2(T - T_ø) + P$$

hvor $T = T(t)$ er temperaturen inde i bygningen til tiden t, T_u er temperaturen uden for bygningen (udetemperaturen), $T_ø$ er den ønskede temperatur inde i bygningen og P er temperaturændringen forårsaget af personer og maskiner inde i bygningen. I differentialligningen optræder endvidere to konstanter k_1 og k_2.

a) Hvilke(t) fortegn har konstanterne k_1 og k_2?
b) Hvilke forhold/fænomener er bestemmende for konstanterne k_1 og k_2?
c) Er differentialligningen lineær og/eller homogen? (begrund svaret).
d) Lad udetemperaturen variere periodisk som: $T_u = A - B\cos(\left(\frac{2\pi}{24}\right)t)$ hvor A og B er konstanter. Tegn en skitse af udetemperaturen som funktion af tiden.
e) Løs denne differentialligning for det tilfælde, hvor både $T_ø$ og P er konstante, samt udetemperaturen varierer periodisk som angivet ved udtrykket under spørgsmål d.

OPGAVE JHP-2 (12 %)

Der er givet flg. differentialligning:

$$y'' + 10y' + 25y = 0$$

hvor $y = y(x)$.

a) Find den generelle løsning til denne differentialligning.

I det følgende ønskes den samme differentialligning løst på en lidt anden måde, nemlig hvor det antages, at man kender den ene basisfunktion til ovennævnte differentialligning. Ud fra denne kendte basisfunktion ønskes den anden fundet.

b) Vis at basisfunktionen $y_1 = e^{-5x}$ er en løsning til ovennævnte differentialligning.

Derefter dannes en ny funktion $y_2 = uy_1$. hvor $u = u(x)$.

c) Hvorfor kan u ikke blot være en konstant?
d) Find den første- og anden afledede af y_2 og indsæt disse i ovennævnte differentialligning. Hvilken slags ligning i u fremkommer herved?
e) Find u og eftervis at dette giver samme resultat som under spørgsmål a.

OPGAVE JHP-3 (15 %)

Betragt en streng med længden $L = \pi$. Massetætheden ρ og opspændingen (tension) T antager netop sådanne værdier at $c^2 = T/\rho = 1$. Strengen er fastgjort i begge ender og kan udføre transversale svingninger i planet på sædvanlig vis. Når strengen sættes i svingninger er den bragt til et udsving $f(x)$ givet ved

$$f(x) = \begin{cases} 0 \;;\; 0 < x \leq \frac{\pi}{4} \\ h\left(\frac{x}{\pi} - \frac{1}{4}\right) \;;\; \frac{\pi}{4} < x \leq \frac{\pi}{2} \\ h\left(\frac{3}{4} - \frac{x}{\pi}\right) \;;\; \frac{\pi}{2} < x \leq \frac{3\pi}{4} \\ 0 \;;\; \frac{3\pi}{4} < x \leq \pi \end{cases}$$

Strengen slippes fra hvile efter den er bragt til dette begyndelsesudsving. Konstanten h er meget lille. I bogen står anført flg. udtryk

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = f(x)$$

a) Hvorfor er der tale om en ulige periodisk (sinus) Fourier-udvikling af $f(x)$?
b) Ville det være muligt at udføre disse beregninger med en lige periodisk (cosinus) udvikling af $f(x)$?
c) Kan $f(x)$ beskrives med blot en enkelt Fourier-komponent? (begrund svaret).
d) Hvorfor må man stille som krav, at h skal være meget lille?
e) Find svingningsmønstret for strengen vha. Fourier-rækker.

Resultatet kan – efter nogle omskrivninger – udtrykkes på formen

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(nx)\cos(nt)$$

hvor

$$B_n = \frac{8h}{\pi^2 n^2} \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) \sin^2\left(n\frac{\pi}{8}\right)$$

f) Det ses at $B_n = 0$ for n lige. Hvad er forklaringen på det?

OPGAVE JHP-4 (11 %)

Fra Yellowstone National Park foreligger der flg. talværdier for hhv. halelængde og kropsvægt af 10 ulve. Der er tale om amerikanske data, hvorfor halelængden er opgivet i amerikanske tommer og kropsvægten i amerikanske pund.

Halelængde	10	13	19	19	20	20	23	24	25	27
Kropsvægt	79	72	100	116	85	88	100	80	160	120

a) Udfør en simpel lineær regressionsanalyse på dette datasæt idet halelængden betragtes som den uafhængige variabel (x-variablen) og kropsvægten som den afhængige variabel (y-variablen).
b) Opstil nulhypotesen for de to T-test på hhv. skæringen med y-aksen og hældningen, samt giv en konklusion på disse tests.
c) Opstil nulhypotesen for F-testet i regressionsanalysens variansanalysetilgang og giv en konklusion på dette test.
d) Kan man med rimelighed tale om en lineær sammenhæng mellem disse værdier?