

---

AALBORG UNIVERSITET ESBJERG

---

Skriftlig eksamen i

Partielle differentiallyigninger, sandsynlighedsregning og statistik  
B3

Fredag den 4. januar 2013 kl. 09.00 – 13.00

---

Eksaminanden medbringer:

Alle hjælpemidler er tilladte med undtagelse af mobiltelefon og internetadgang.

**Eksaminanderne medbringer selv papir til kladde og renskrift.**

Aflevering:

Opgave UTR 1-3 afleveres i gult omslag til Ulla Tradsborg.  
*Bedømmelsen afleveres på ternet papir.*

*Beregninger kan eventuelt afleveres på USB-stik (der må kun være beregninger på USB-stik).*

Opgave JHP 1-4 afleveres i rødt omslag eller USB-stik til  
Jørgen H. Pedersen

Besvarelsene bedes forsynet med navn, cpr. og sidenummer.  
Hvis USB-stik anvendes, skrives nummeret på omslaget

---

Bilag:

Ingen.

---

**OPGAVE JHP 1 (15 %)**

Der er givet en harmonisk oscillator, hvor massen  $m$ , dæmpningskonstanten  $c$  og fjederkonstanten  $k$  har værdierne:

$$m = 1 \quad ; \quad c = 4 \quad ; \quad k = 3$$

Den harmoniske oscillator udfører frie svingninger.

- Opstil differentiallyigningen for den harmoniske oscillator.
- Er der tale om over-, kritisk- eller underdæmpede svingninger?
- Find svingningskoordinaten  $y$  som funktion af tiden, altså find  $y = y(t)$ , hvilket svarer til at finde løsningen til differentiallyigningen under spgm. a).
- Omskriv differentiallyigningen fra spgm. a) til to første ordens koblede differentiallyigninger efter principperne i theorem 1 i afsnit 4.1.
- Find løsningen til dette system af to koblede første ordens differentiallyigninger.

**OPGAVE JHP 2 (10 %)**

Der er givet flg. differentiallyigning:

$$\frac{d^2v(x)}{dx^2} = \frac{P}{EI}(x - L)$$

hvor  $L$ ,  $P$ ,  $E$  og  $I$  alle er konstanter.

- Find den generelle løsning til denne differentiallyigning, altså find  $v = v(x)$ .

Der oplyses endvidere to betingelser:

$$\frac{dv}{dx} = 0 \quad \text{for } x = 0 \quad \text{og} \quad v(x) = 0 \quad \text{for } x = 0$$

- Anvend disse betingelser til at bestemme integrationskonstanterne fra spgm. a), og anfør løsningen med disse indsat.
- Fra hvilken teknisk sammenhæng stammer denne differentiallyigning?
- Giv en tolkning af de to betingelser  $v(0) = 0$  og  $v'(0) = 0$ .

**OPGAVE JHP 3 (10 %)**

Betragt en homogen metalstang med længden  $L$ . Stangen er termisk isoleret fra omgivelserne på sidefladerne. Vekselvirkningen med omgivelserne finder udelukkende sted via endefladerne, hvor temperaturen holdes konstant lig med 0 på begge endeflader.

Stangen er fremstillet af et materiale, hvis termiske ledningsevne, specifikke varmekapacitet og massetæthed netop antager sådanne værdier, at den termiske diffusivitet er lig med 1, altså  $c^2 = 1$ .

Ved eksperimentets start har stangen en temperaturfordeling givet ved:

$$f(x) = u(x, 0) = \begin{cases} x & , \quad 0 < x < \frac{L}{2} \\ L - x & , \quad \frac{L}{2} < x < L \end{cases}$$

- Hvor mange Fourier-komponenter (en, to, tre eller uendeligt mange) kræves der for at beskrive  $f(x)$ ? (begrund svaret)
- Forklar hvorfor  $B_2 = B_4 = B_6 = \dots = 0$ . Du må gerne give en forklaring uden at udføre beregninger.
- Find temperaturfordelingen som funktion af sted og tid inde i stangen, find altså  $u = u(x, t)$ .

#### OPGAVE JHP 4 (15 %)

I forbindelse med produktion af en bestemt type betonvarer er der målt sammenhørende værdier af den producerede mængde og pris som vist i nedenstående tabel. Værdierne er kodede, hvorfor det ikke er muligt at hæfte bestemte enheder på talmaterialet.

Mængde	Pris	Mængde	Pris
41,66	20812,70	39,22	20302,30
40,54	20734,90	41,78	20776,70
38,90	20258,70	38,88	20373,00
38,69	20232,40	38,84	20213,70
40,58	20493,40	37,18	19848,70
40,48	20750,30	41,16	20818,90
36,88	19932,80	39,19	20265,10
39,47	20303,70	40,38	20654,50
41,41	20760,30	40,01	20553,00
38,07	20002,20	39,96	20463,10

- Udfør en simpel lineær regressionsanalyse på dette datasæt idet mængden betragtes som den uafhængige variabel ( $x$ -variablen) og prisen som den afhængige variabel ( $y$ -variabel).
- Opstil nulhypotesen for de to T-test på hhv. skæringen med  $y$ -aksen og hældningen, samt giv en konklusion på disse tests.
- Opstil nulhypotesen for F-testet i regressionsanalysens variansanalysetilgang og giv en konklusion på dette test.
- Kan man med rimelighed tale om en lineær sammenhæng mellem disse værdier?

### UTR Opgave 1. (16 %)

Funktionen  $f(x) = \exp(x) + x - 2$  betragtes. Vi søger efter funktionens skæring med x-aksen i nærheden af  $x_0 = 1$ .

- Opstil et iterationsudtryk ved Newton Raphsons metode og gennemfør 10 beregninger.
- Hvor mange iterationer skal der foretages inden den relative fejl mellem 2 iterationer er under 0,000001.
- Opstil et udtryk til beregning af fejlen efter  $n+1$  iterationer for Newton-Raphsons metode. Sammenlign med svaret i spørgsmål b. og kommentér.

### UTR Opgave 2. (17 %)

Givet differentiallyigningen fra JHP Opgave 1. I denne opgave er der fundet et koblet sæt af første ordens differentiallyigninger. Endvidere er løsningen til differentiallyigningen fundet.

Vi anvender følgende begyndelsesværdibetingelser:  $y(0) = 3$  og  $y'(0) = -2$ .

- Løs det koblede sæt af første ordens differentiallyigninger vha. Eulers metode med stepstørrelsen  $h=0,05$  for at finde  $y(1)$  og  $y'(1)$ .
- Bestem den partikulære løsning til differentiallyigningen med de givne begyndelsesværdibetingelser.
- Plot  $y(t)$  fra spørgsmål a. og den partikulære løsning fra spørgsmål b. i samme graf. Sammenhold de 2 grafer og kommentér.

### UTR Opgave 3. (17 %)

En virksomhed har 2 pakkemaskine til pakning af helkilopakker. Virksomheden af udtaget en tilfældig stikprøve fra hver af maskinerne og har derefter beregnet estimater for middelvægten og spredningen. Følgende resultater er fremkommet:

	Pakkemaskine 1	Pakkemaskine 2
Stikprøvestørrelse	16	10
Estimat for middelvægt	1006,34 g	1020,60 g
Estimat for spredning	3,73 g	4,07 g

- Undersøg ved et test om varianserne på pakningerne fra de 2 pakkemaskiner er ens.
- Undersøg ved et test om indholdet i pakningerne er større i den ene pakkemaskine end i den anden.
- Opstil et 95 % konfidensinterval for forholdet mellem de 2 varianser.
- Opstil et 95 % konfidensinterval for differencen mellem de 2 middelværdier.
- Kommentér: Er der overensstemmelse mellem testresultaterne og de opstillede konfidensintervaller. Begrund dit svar.